Física Experimental IV

Notas de aula: www.fap.if.usp.br/~hbarbosa

LabFlex: www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex

Aula 2, Experiência 3
Circuitos CA e Caos

Prof. Henrique Barbosa
hbarbosa@if.usp.br
Ramal: 6647
Ed. Basílio Jafet, sala 100

Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados

- 5 aulas
  - Noções de CA, filtro RC e circuito integrador
  - Análise de Fourier unidimensional
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

Objetivos da Semana

- Observar as transformadas de Fourier na entrada e na saída do circuito integrador
  - Isso significa utilizar uma freqüência para a qual você sabe que o circuito está funcionando como um bom integrador
  - Comparar o resultado com a previsão teórica

- E projetar dois filtros
  - Um passa-alta
  - e outro passa-baixa
  - E verificar que eles se comportam como esperado

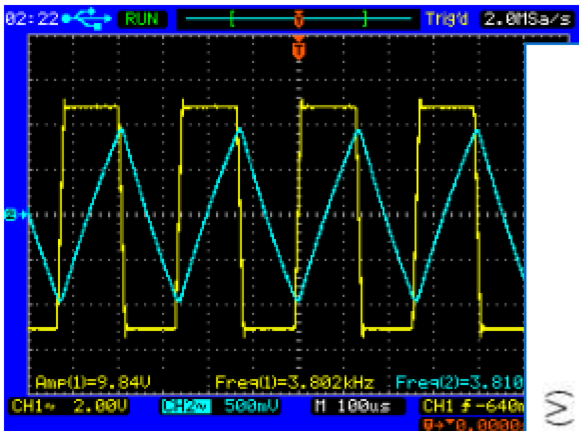
TAREFAS SEMANA PASSADA

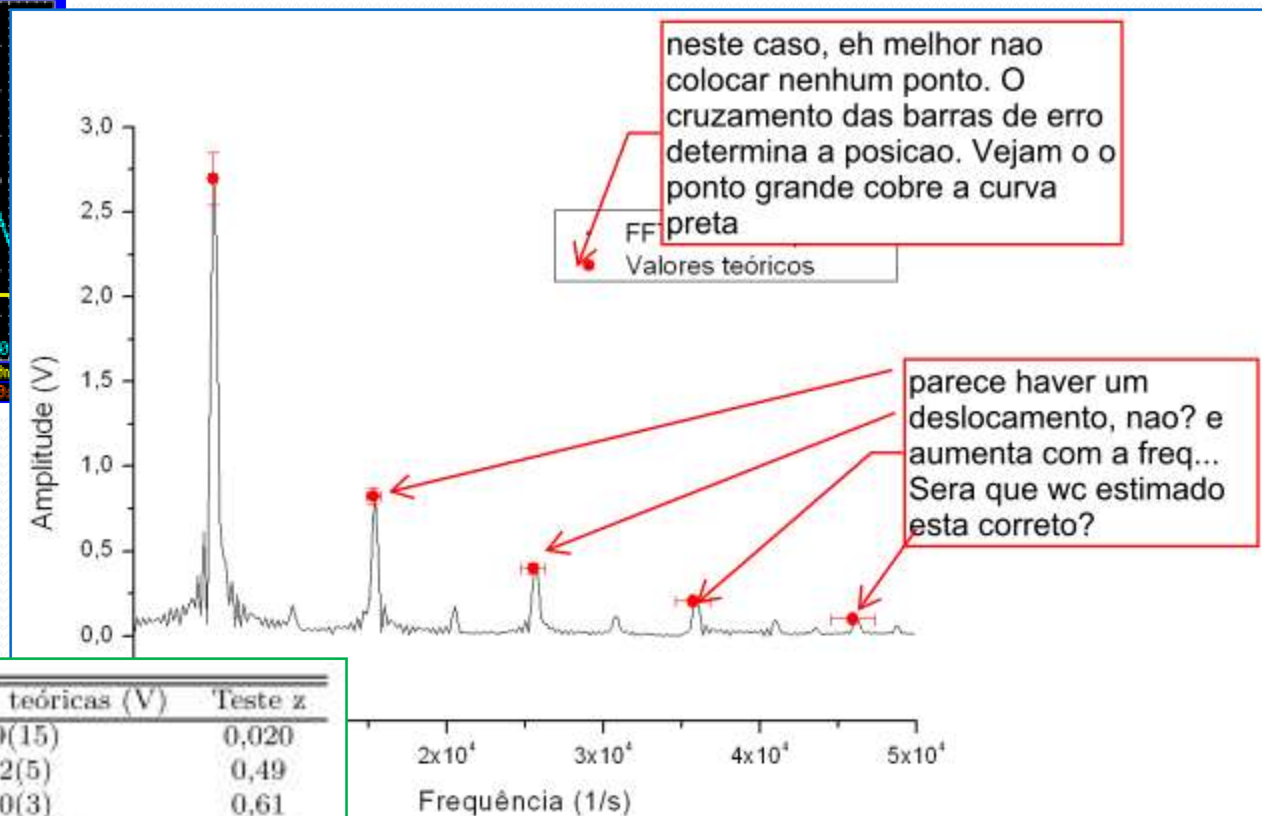
Circuito Integrador

- Montar o filtro **RC** de **fc=500Hz**
  - Alimentá-lo com uma onda quadrada de freqüência **f>>fc**, ou seja, de modo que a onda na saída seja a integral da onda na entrada
    - Anote as amplitudes (Volts) do sinal de entrada e saída, compare as duas e fotografe
- Para obter a transformada de Fourier das ondas na entrada e na saída, utilize o DataStudio com a função **FFT** (Fast Fourier Transform)
  - Obtenha as amplitudes e freqüências que compõem esses sinais e compare <u>quantitativamente</u> com a previsão teórica
    - Faça o gráfico de **amplitude X freqüência** para a onda da entrada e da saída

Uma boa análise

Como já descrito, montou-se o circuito RC com a resistência $R = 330,9 \pm 3,7\ \Omega$ e uma capacitância $C = 0,997 \pm 0,015\ \mu F$; aplicou-se um sinal em forma de onda quadrada com frequência $\omega = (3,21 \pm 0,10) \times 10^4\ s^{-1}$, que é grande em comparação à frequência de corte, dada por $\omega_c = 1/RC = 3031 \pm 57 s^{-1}$, de forma que o circuito atuou como um circuito integrador. A fotografia dos sinais de entrada e saída encontram-se na figura 4.1.

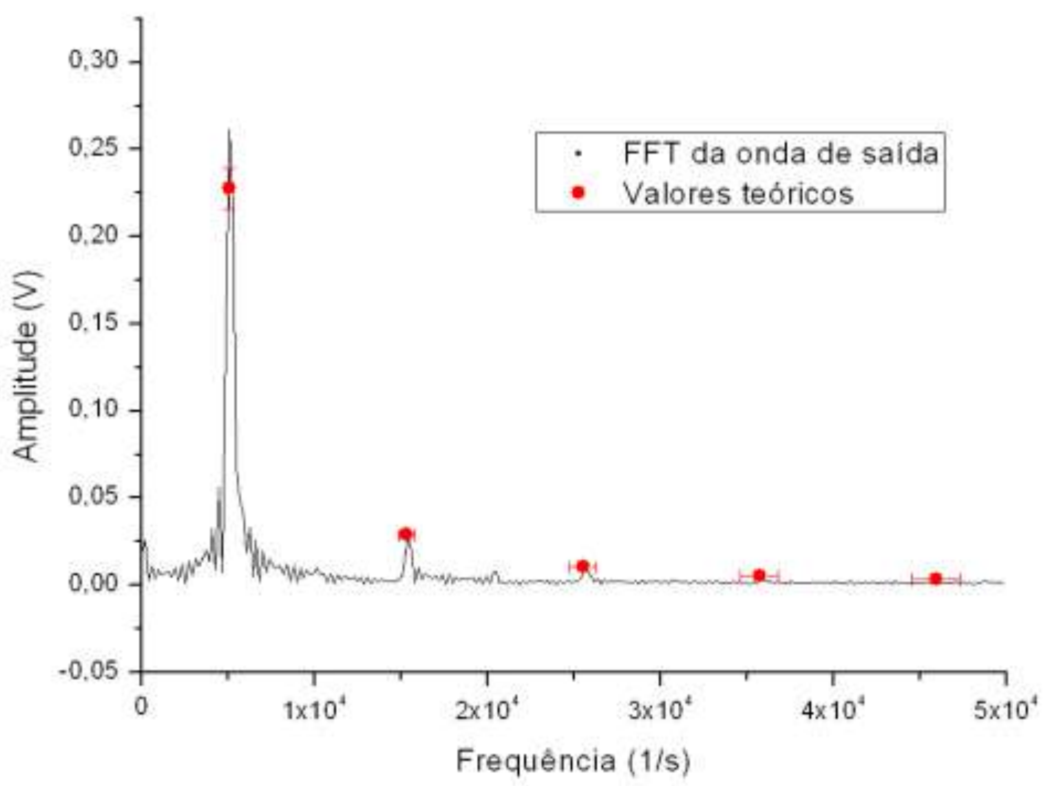




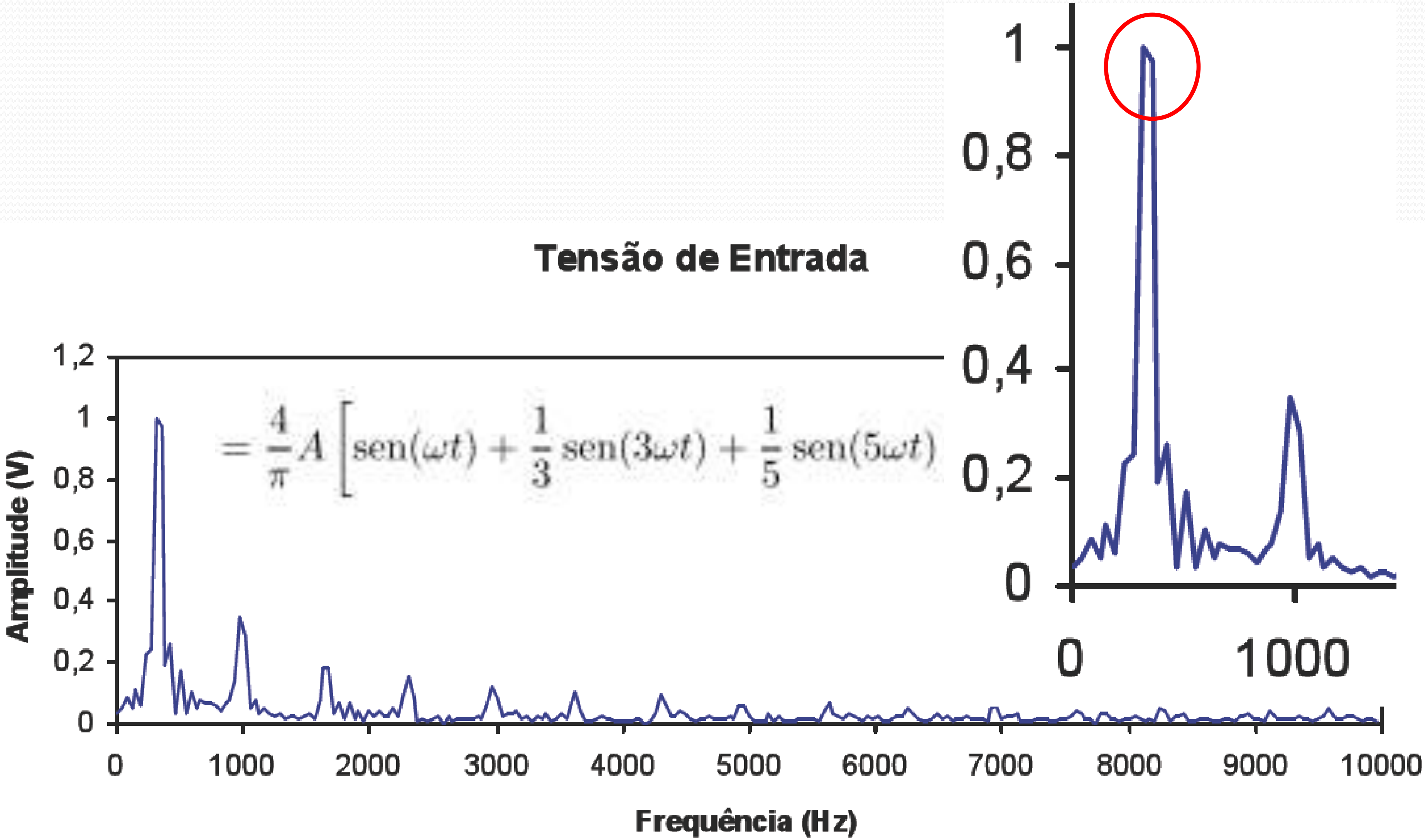
Amplitudes pela FFT (V)	Amplitudes teóricas (V)	Teste z
2,700(5)	2,69(15)	0,020
0,800(5)	0,82(5)	0,49
0,420(5)	0,40(3)	0,61
0,230(5)	0,204(21)	1,1
0,100(5)	0,100(17)	0,012

E a saída triangular?

Amplitudes pela FFT (V)	Amplitudes teóricas (V)	Teste z
0,260(5)	0,245(26)	0,6
0,027(5)	0,028(3)	0,22
0,010(5)	0,010(1)	0,04

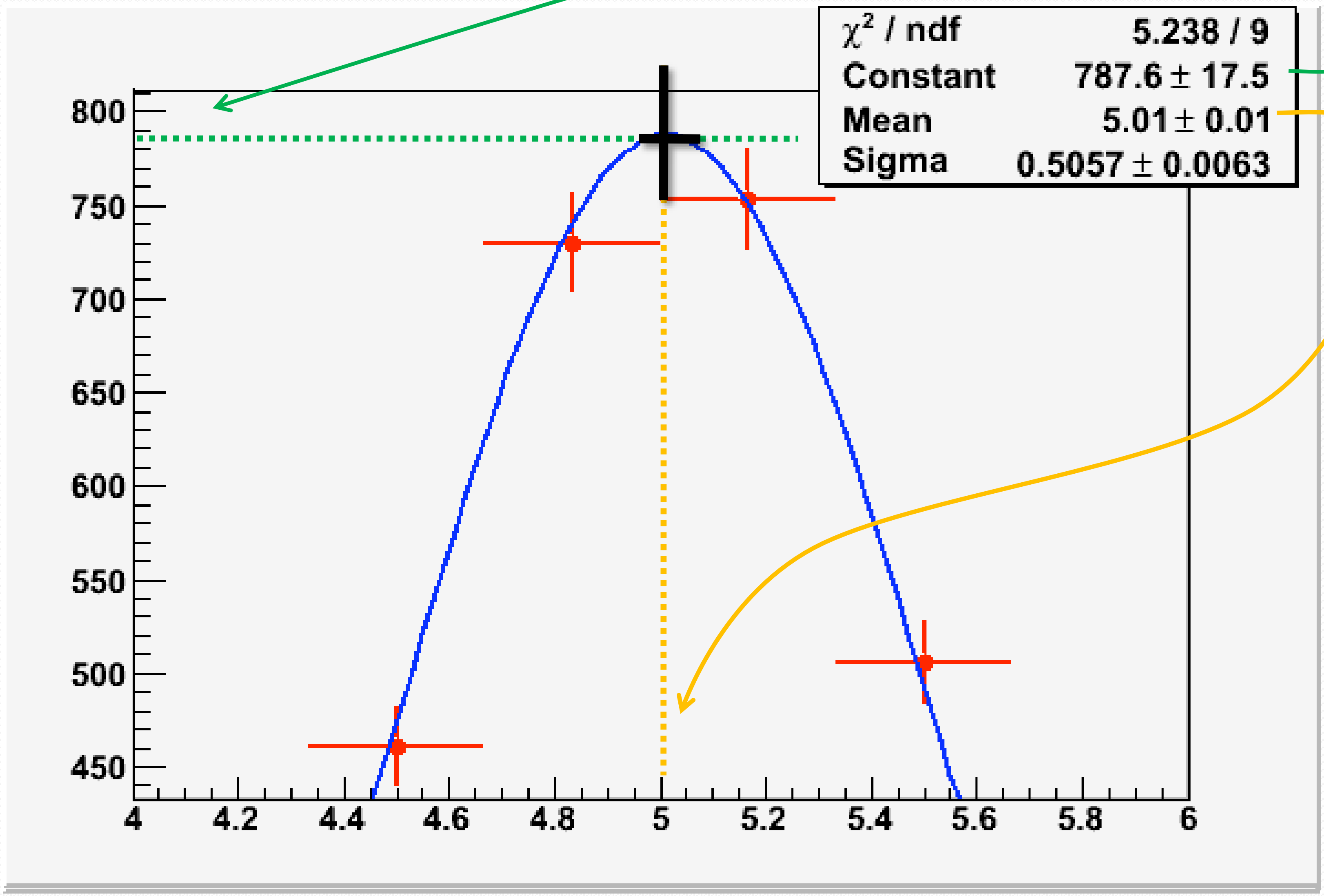


Indo além do óbvio…



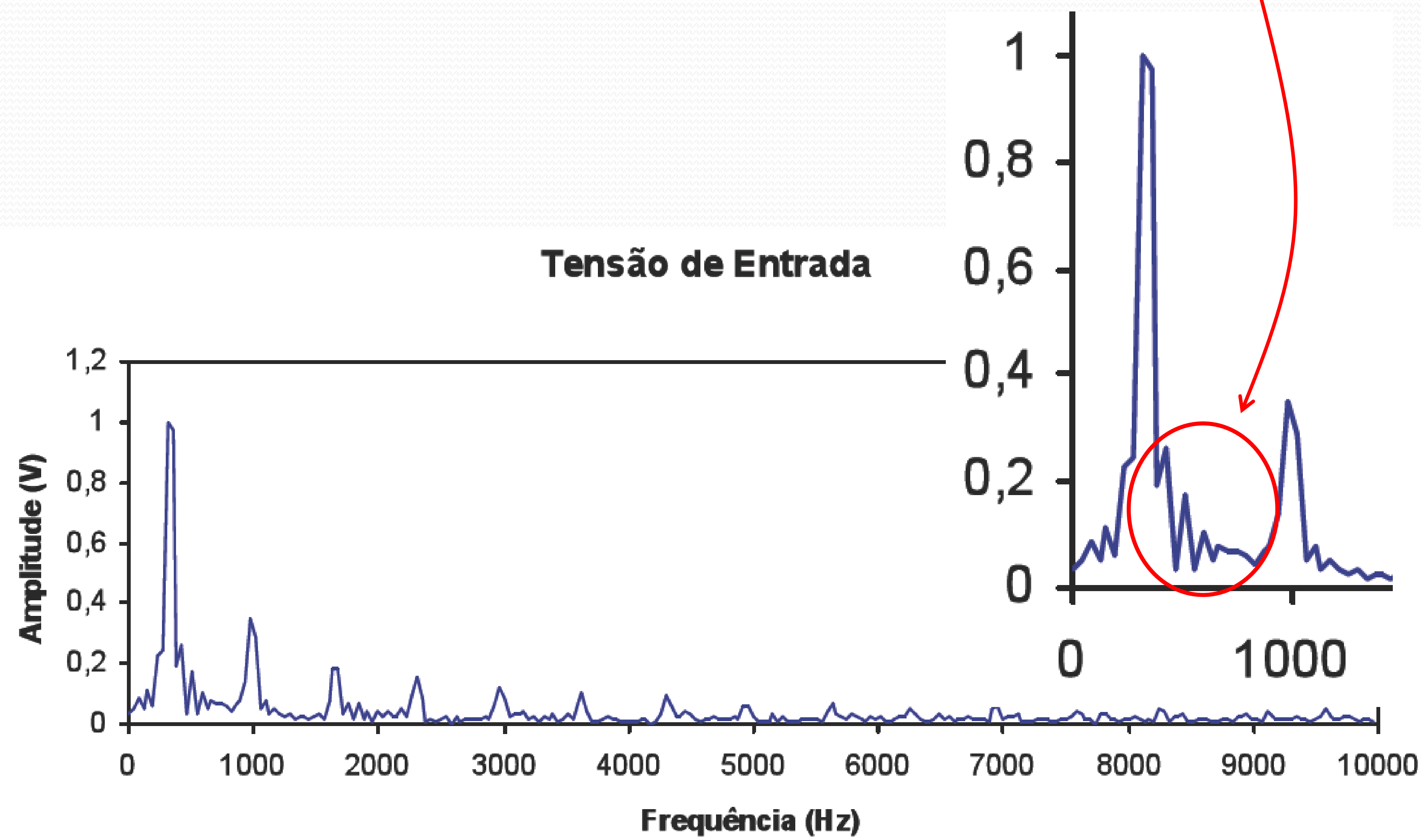
A.A.P. Suaide & M. Tabacniks (Lablfex, 2008)

Como medir os picos



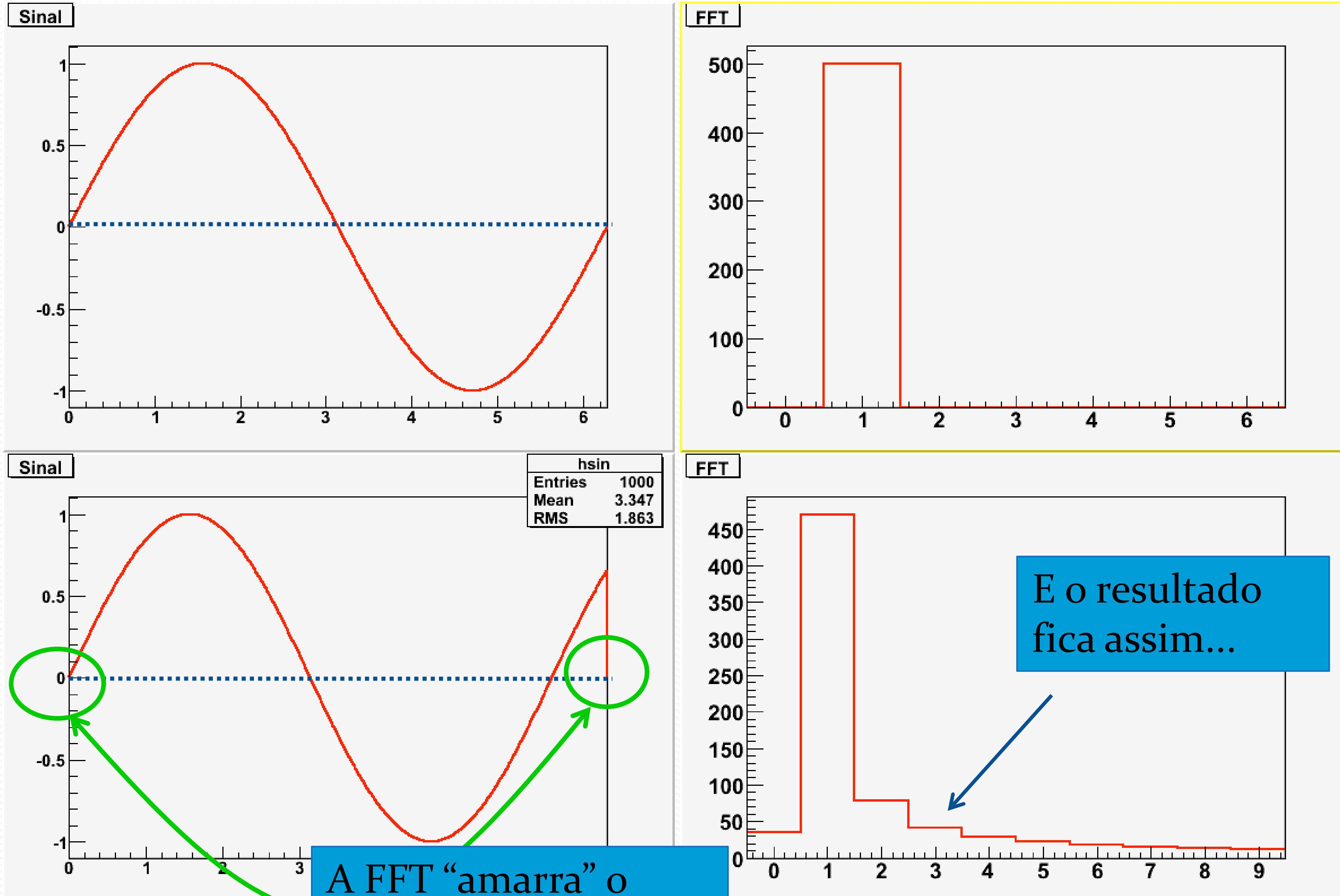
A.A.P. Suaide & M. Tabacniks (Lablfex, 2008)

Mas porque a FFT tem tanto ruído?



A.A.P. Suaide & M. Tabacniks (Lablfex, 2008)

O Intervalo de Amostragem

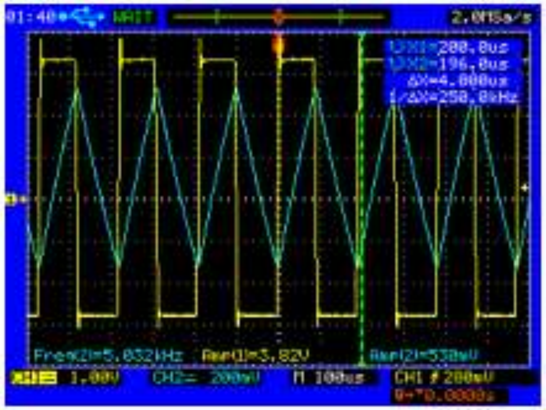


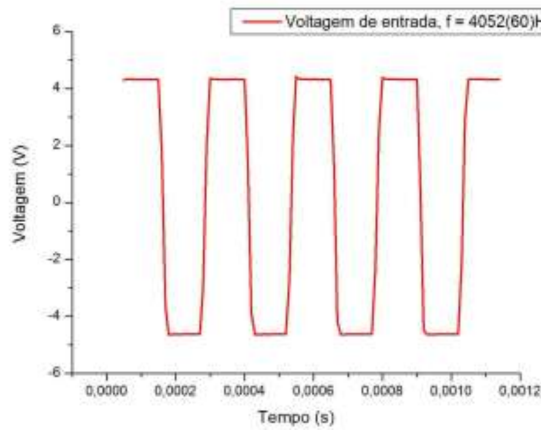
E o resultado fica assim...

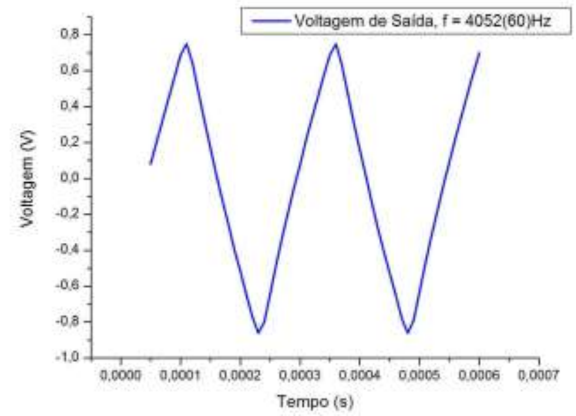
A FFT “amarra” o começo com o final

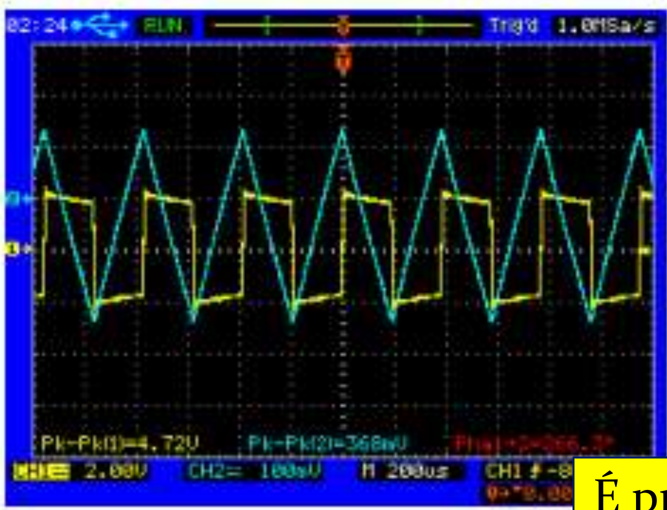
A.A.P. Suaide & M. Tabacniks (Lablfex, 2008)

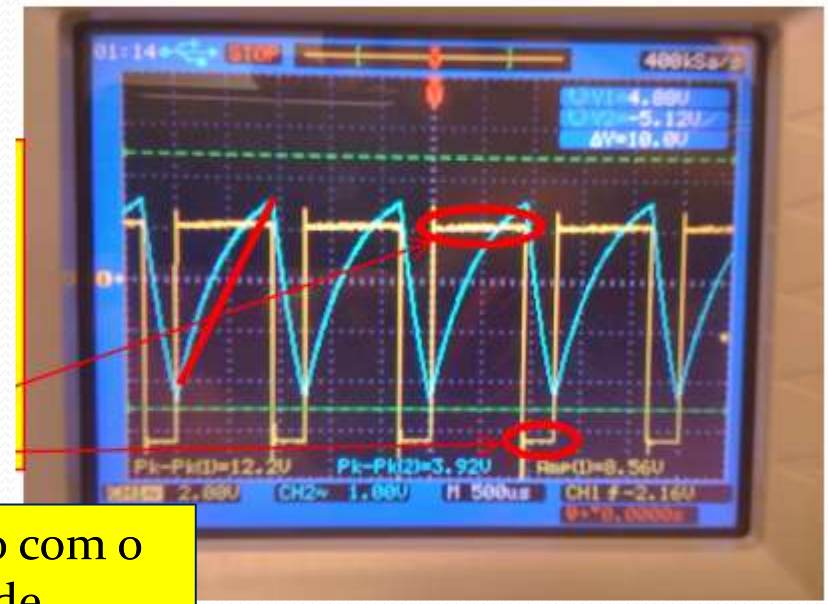
Outros resultados – Vs e Ve









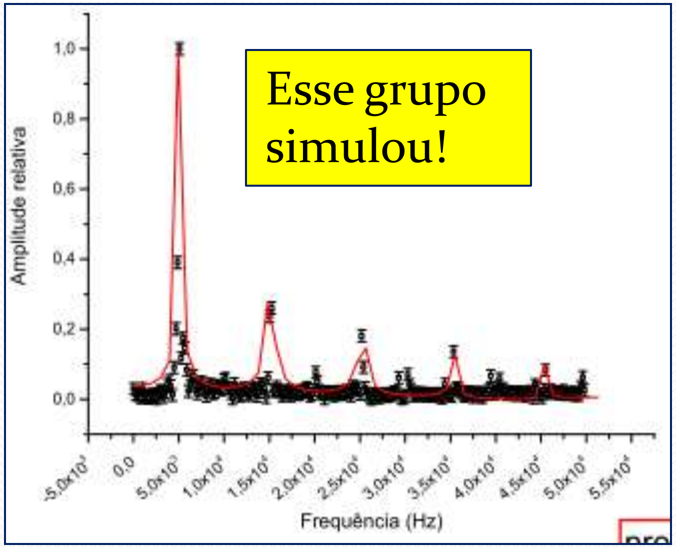


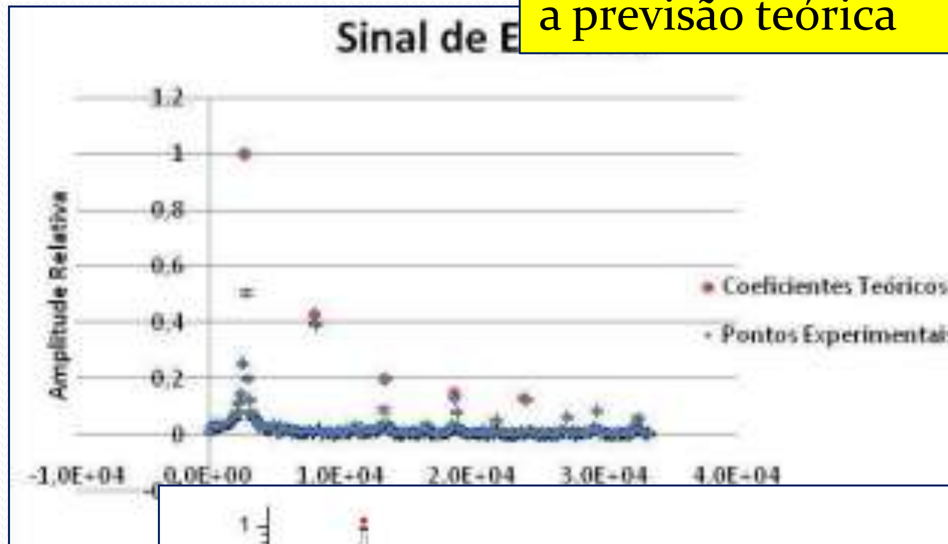
É preciso cuidado com o formato do sinal de entrada e saída...

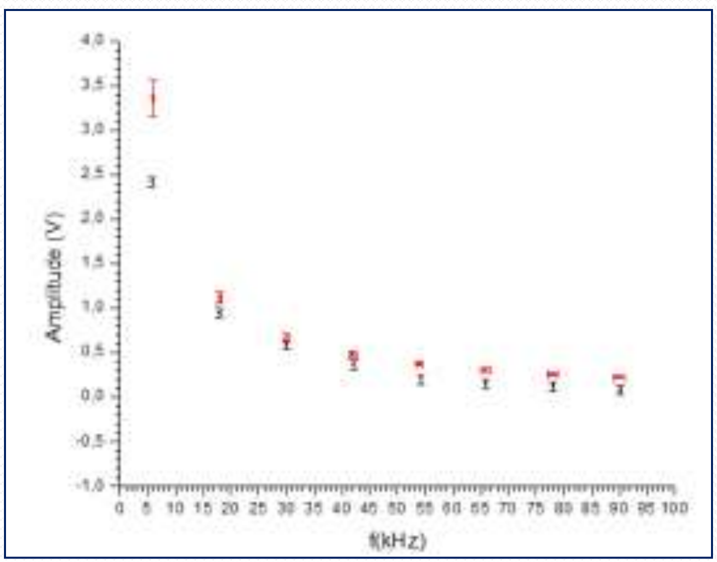
Quadrada

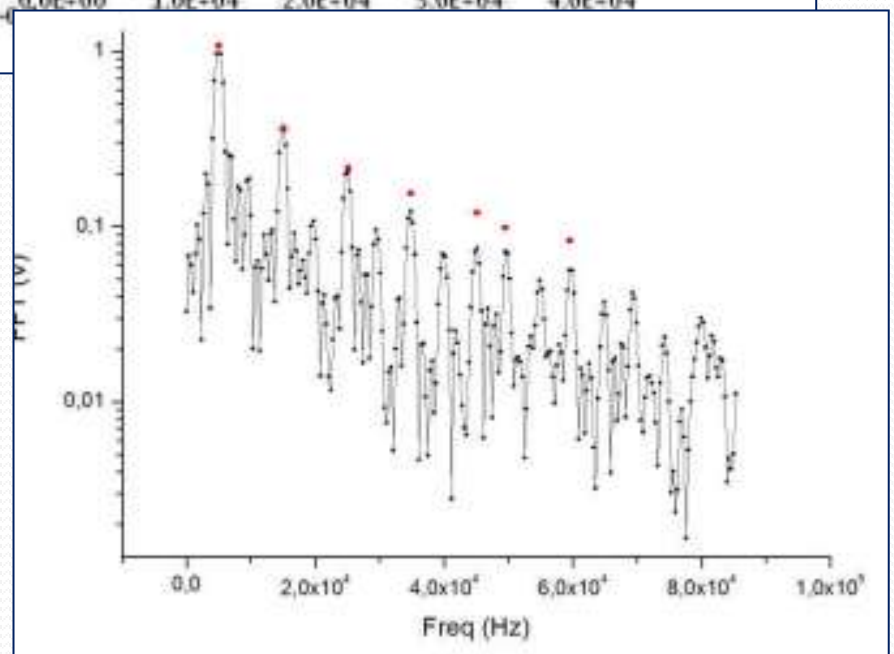
A maioria comparou com a previsão teórica

Esse grupo simulou!



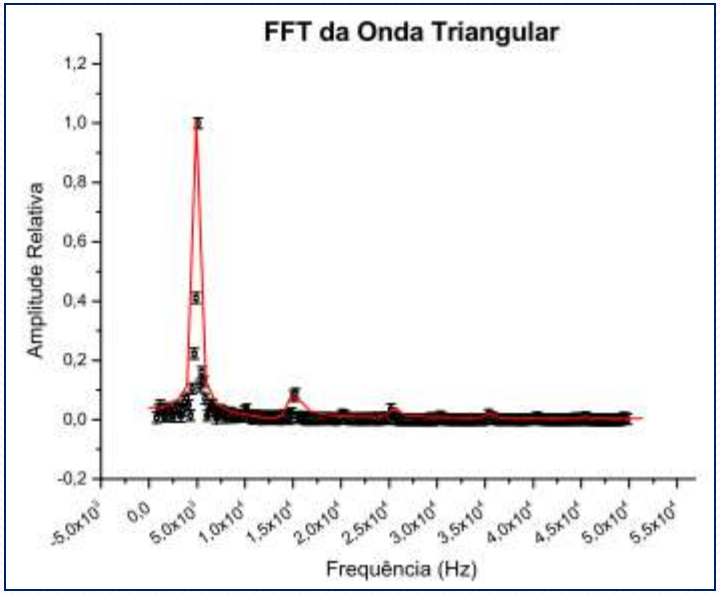


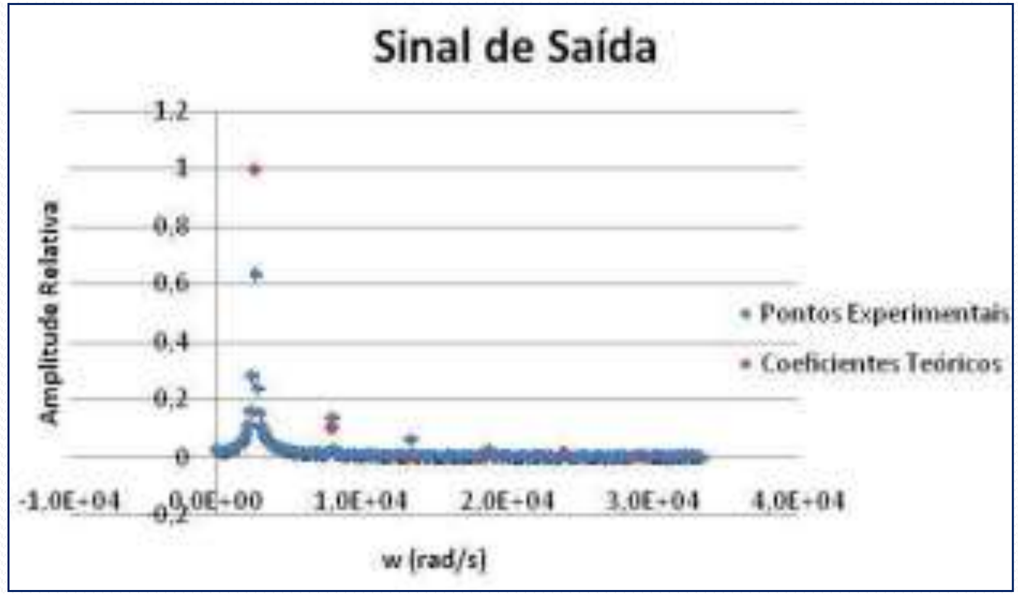


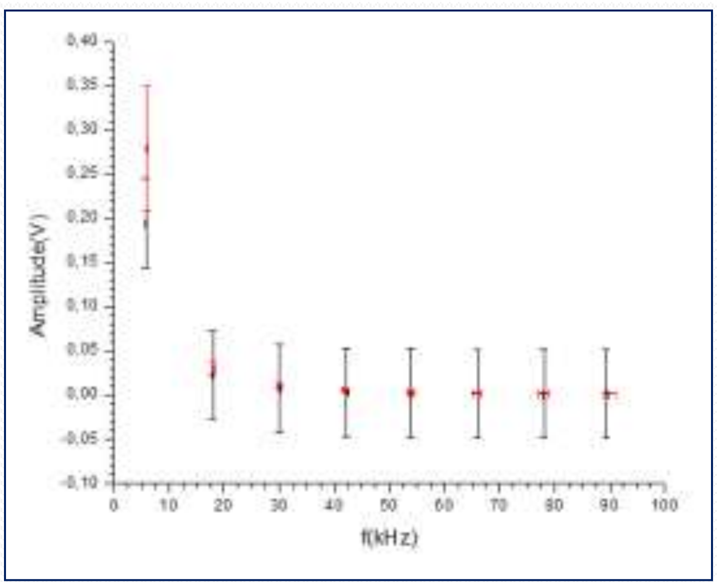


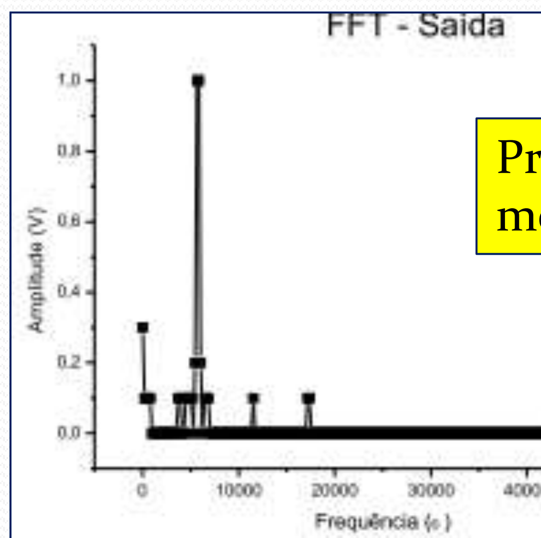
(fig 1) FFT da onda quadrada

Triangular



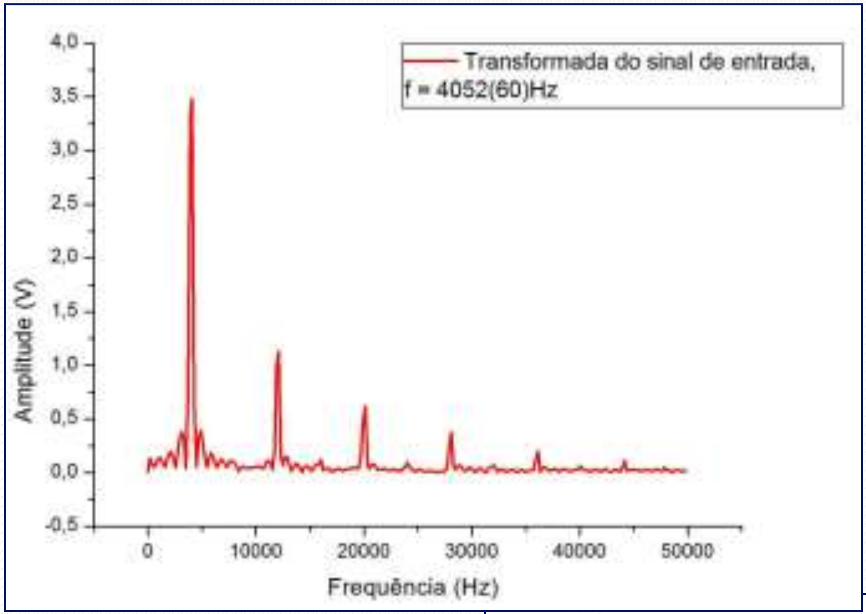




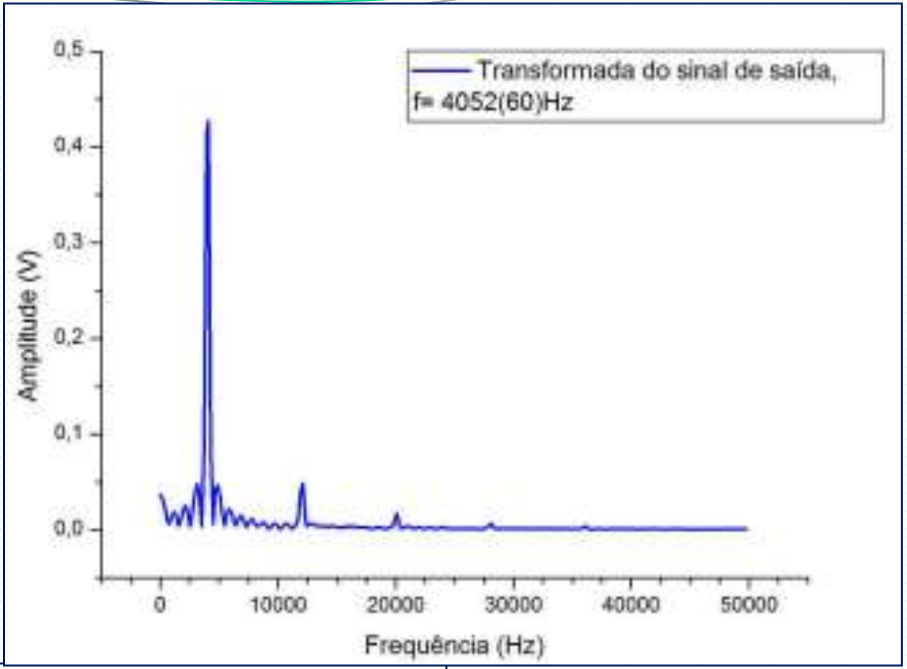


Problemas na medida

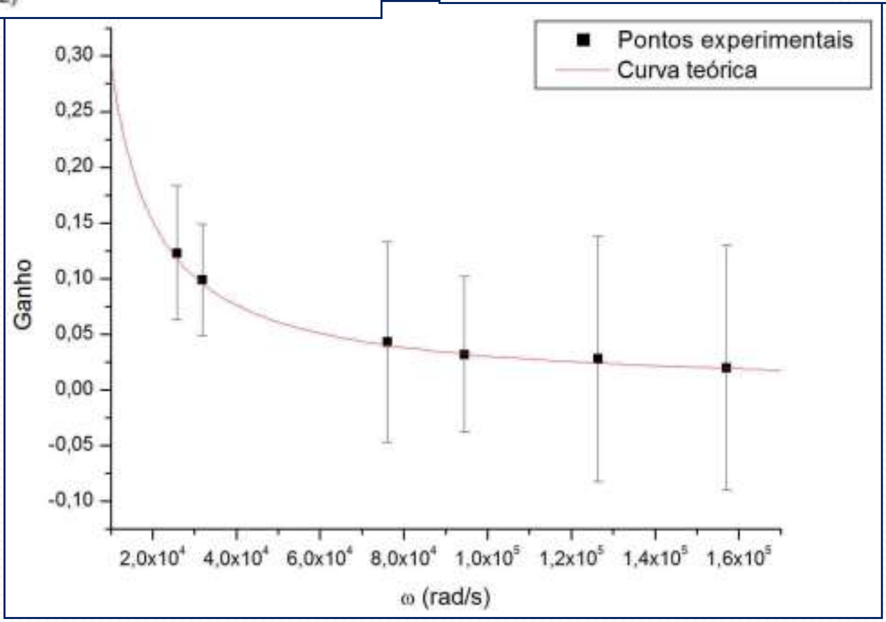
Ganho



Transformada do sinal de entrada,
f = 4052(60)Hz
Amplitude (V)
Frequência (Hz)



Transformada do sinal de saída,
f= 4052(60)Hz
Amplitude (V)
Frequência (Hz)

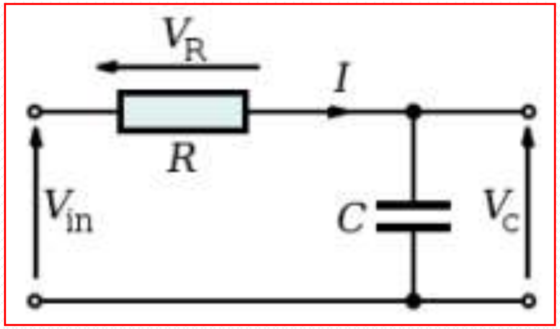


Pontos experimentais
Curva teórica
Ganho
ω (rad/s)

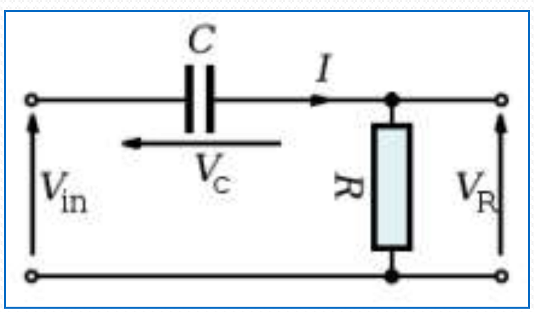
Para esta semana

- O que precisa entregar:
  - Como são construídos os filtros
  - Os valores de **R** e ***C*** em cada caso e a justificativa
  - Fotos do sinal de entrada e saída em cada caso.
- Comente o desempenho dos filtros:
  - Houve atenuação do sinal de interesse? Qual o **ganho**, em cada caso?
  - E quanto ao sinal que se quer descartar? Meça os ganhos.
- Tudo isso para os dois filtros, passa-baixa e -alto

Filtro RC



$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = \frac{\hat{Z}_C}{(\hat{Z}_R + \hat{Z}_C)} = \frac{-\frac{j}{\omega C}}{(R - \frac{j}{\omega C})} \qquad G_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}}$$



$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = \frac{\hat{Z}_R}{(\hat{Z}_R + \hat{Z}_C)} = \frac{R}{(R - \frac{j}{\omega C})} \qquad G_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_C}{\omega}\right)^2}}$$

Uma boa análise

Figura 6: Sinal de entrada da senóide separadamente.

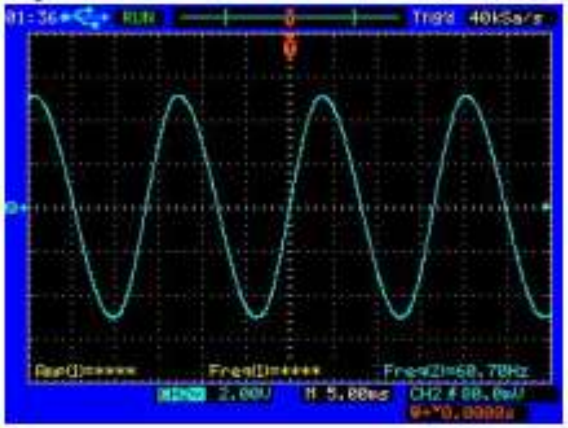


Figura 7: Sinal de entrada do ruído separadamente.

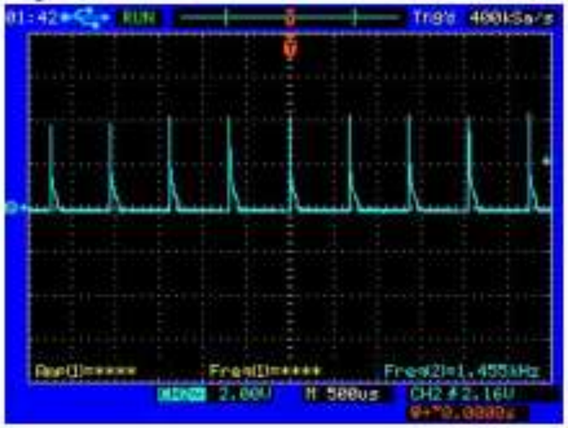
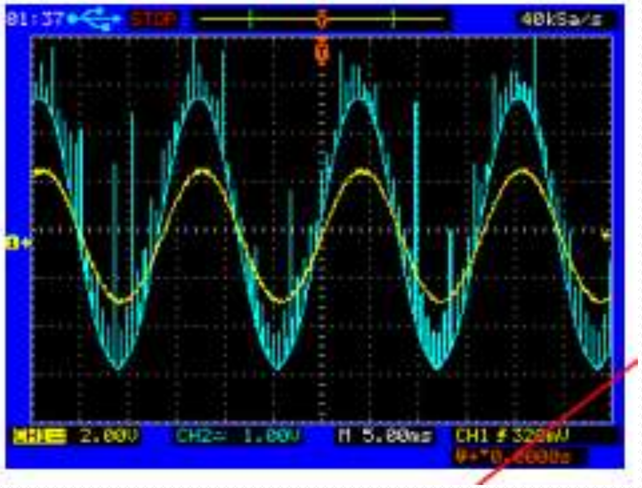
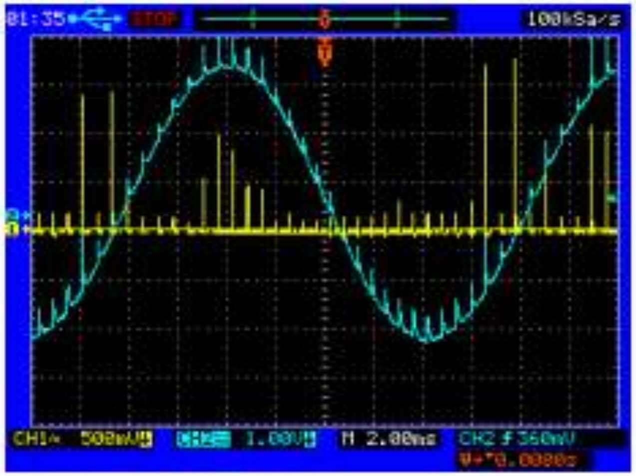


Figura 8: Sinal de saída da soma do ruído com a senóide.

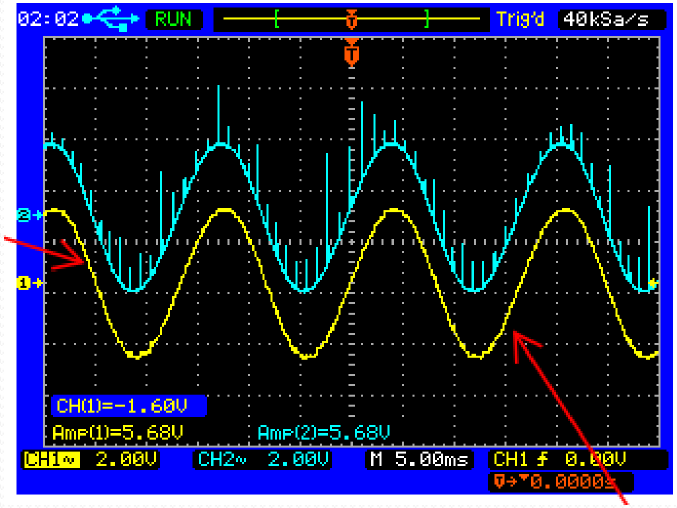
Passa baixa

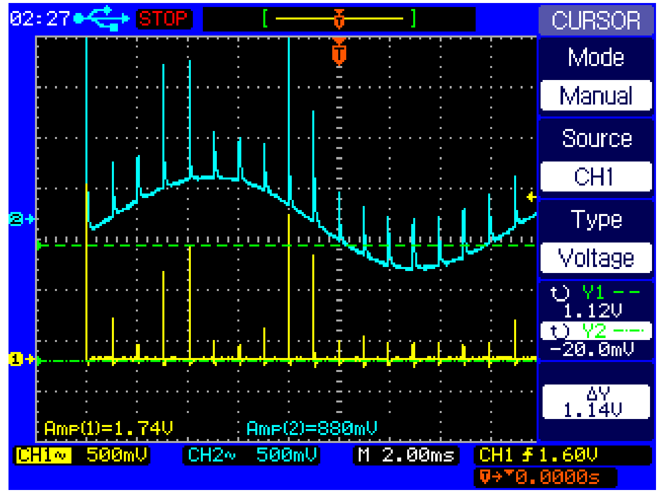


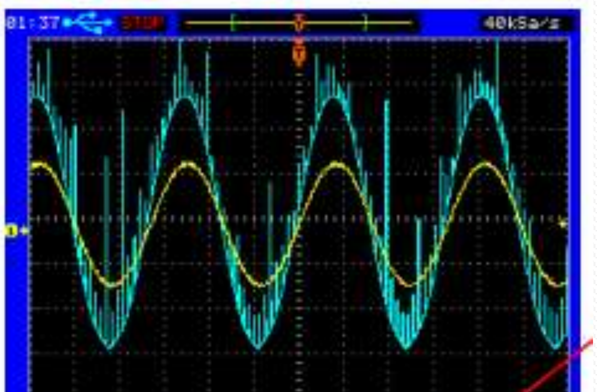
Passa alta



Outros resultados

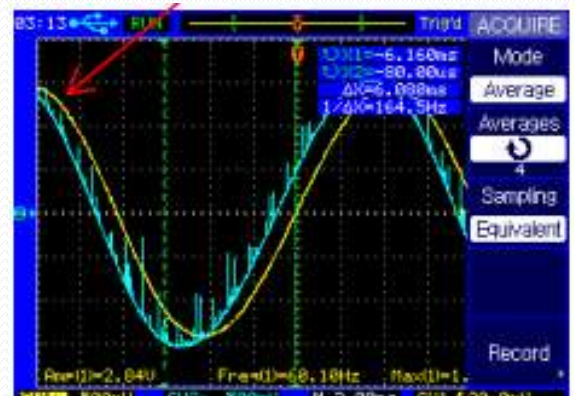






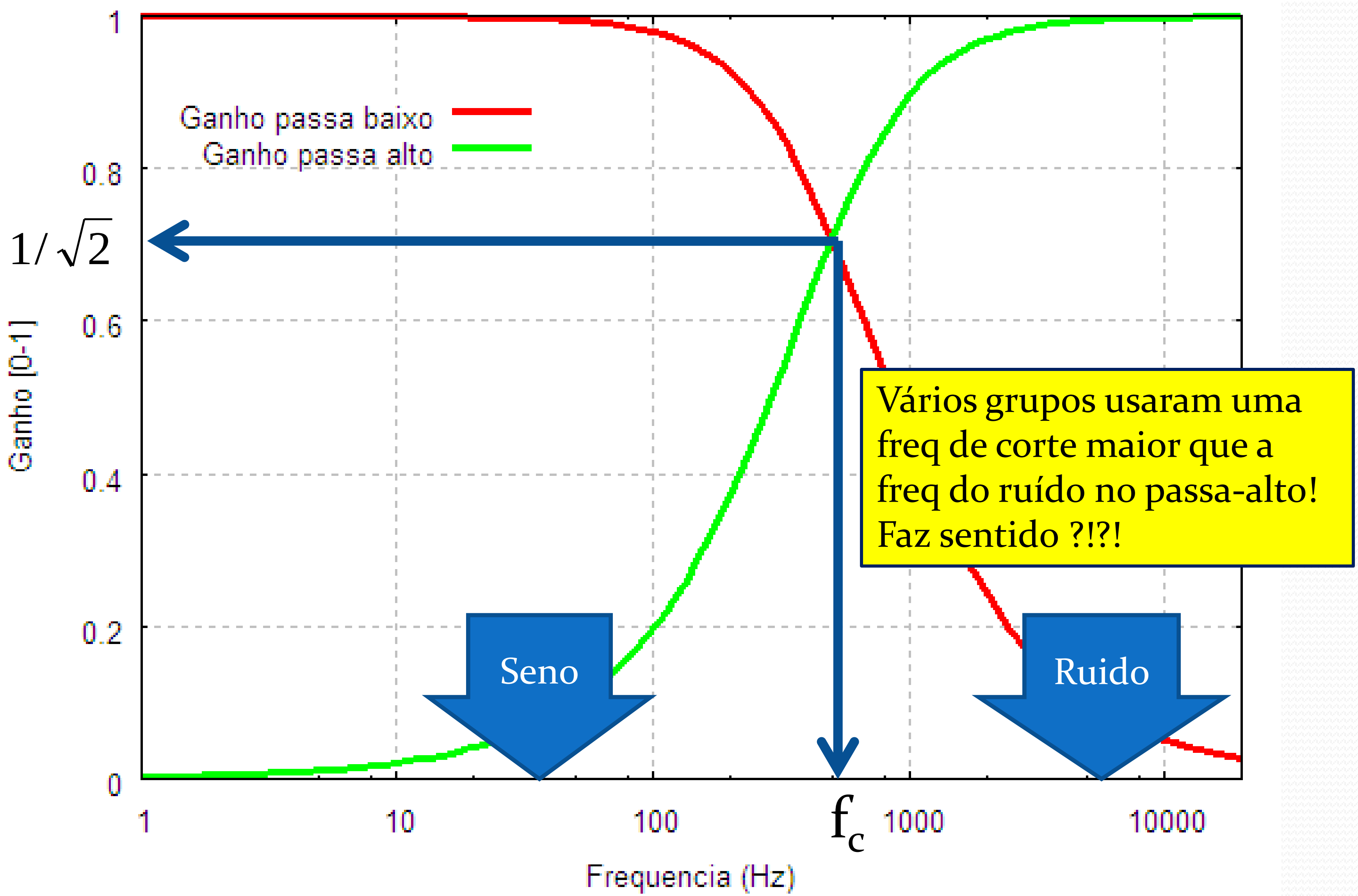
A amplitude de saída maior que de entrada!

Sinal de 60hz não foi atenuado totalmente



Quem viu a diferença de fase devia ter quantificado!

Ganho dos filtros



Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados

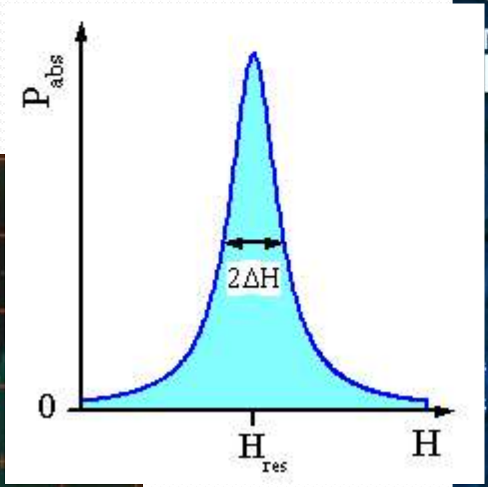
- 5 aulas
  - Noções de CA, filtro RC e circuito integrador
  - Análise de Fourier unidimensional
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

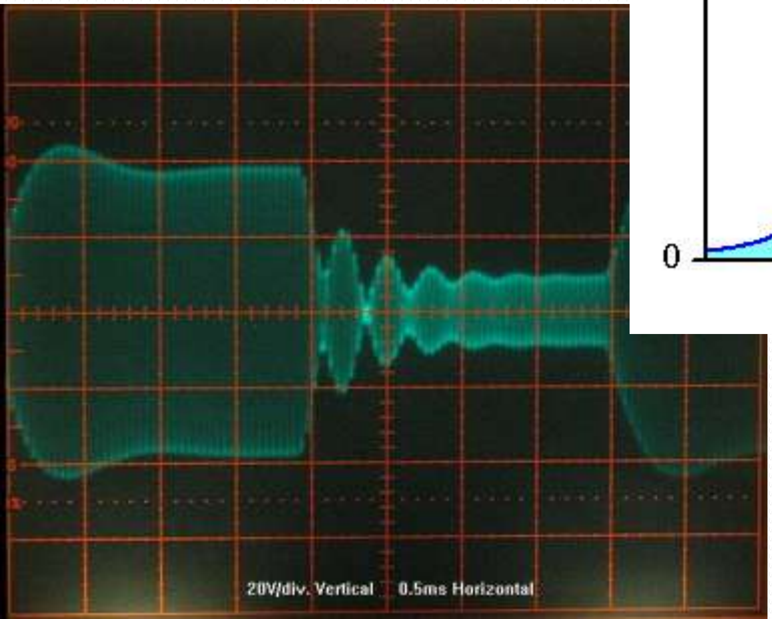
Ressonância em Circuito RLC

- **Ressonância**:

ocorre em todo tipo de fenômeno ondulatório

- ondas mecânicas
  - Em todo tipo de meio
- Ondas eletromagnéticas





O Indutor

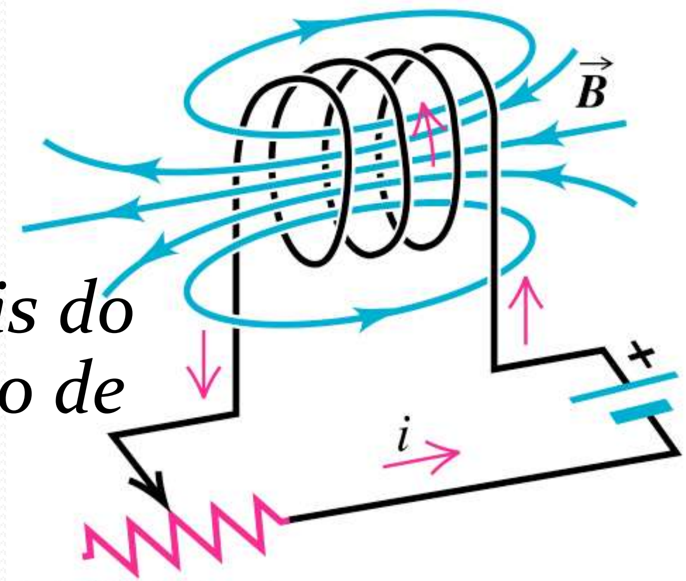
- Ao passar uma corrente elétrica por um indutor, um campo magnético é criado proporcional a corrente

$$B \propto i$$

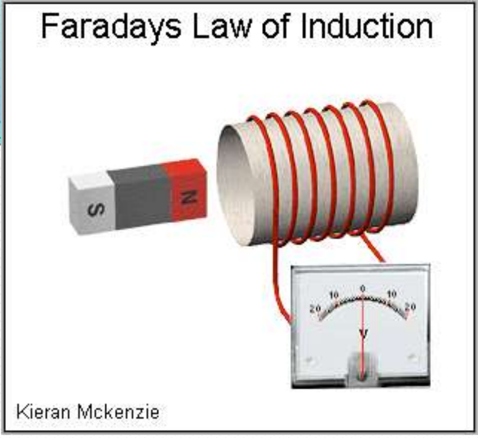
- Se a corrente for variável no tempo, o campo também será! O que nos faz lembrar da lei de Faraday:

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

A tensão elétrica $\boldsymbol{\varepsilon_L}$ *nos terminais do indutor é proporcional à variação de fluxo magnético através dele.*



O Indutor



- Como a única coisa que varia é a corrente:

$$\varepsilon_L = -\frac{d\phi_B}{dt} = -A\frac{dB}{dt} = -cte\frac{di(t)}{dt}$$

- Vamos chamar a constante de **L**, ou indutância, e a força eletromotriz induzida, $\boldsymbol{\varepsilon_L}$, que é a queda de tensão no indutor, será $\mathbf{V_L}$:

$$V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

L é a indutância, medida em Henry (H)

- Em notação complexa, a corrente passando pelo indutor é:

$$\hat{i} = i_L e^{j\omega t}$$

Indutor – Notação Complexa

- E a tensão será então:

$$V_L = L\frac{di}{dt} = j\omega L i_L e^{j\omega t}$$

- Assim a impedância é dada por:

$$\hat{Z}_L = \frac{\hat{V}_L(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{j\omega L i_L e^{j\omega t}}{i_L e^{j\omega t}} = j\omega L$$

Reatância indutiva

- Ou, usando a fórmula de Euler:

$$\hat{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Portanto a tensão está adiantada de π/2 em relação a corrente

A fase da tensão

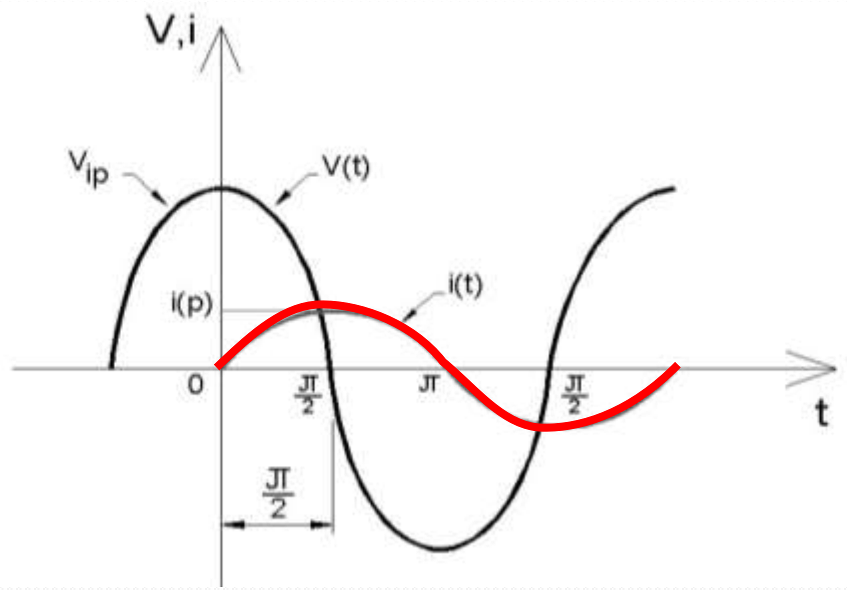
Corrente: $\hat{i}(t) = i_L e^{j\omega t}$

- Indutor:

$$\hat{V}_L(t) = \hat{Z}_L \hat{i}(t)$$

adiantada

$$= \omega L i_L \exp\left[j\left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

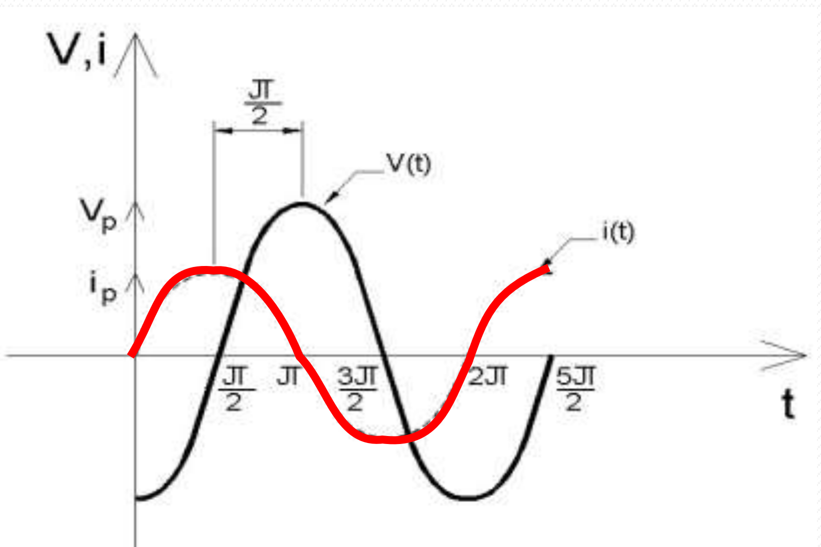


- Como era no capacitor?

$$\hat{V}_C(t) = \hat{Z}_C \hat{i}(t)$$

atrasada

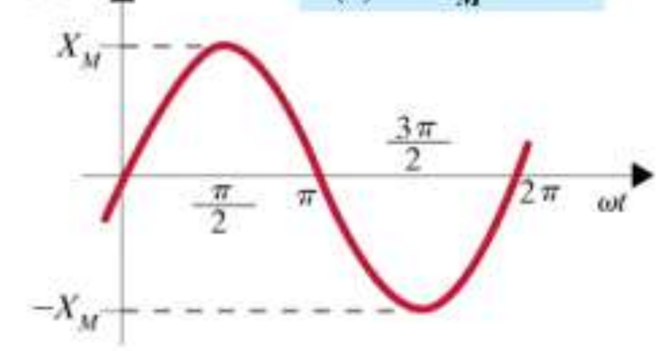
$$= \frac{1}{\omega C} i_C \exp\left[j\left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$



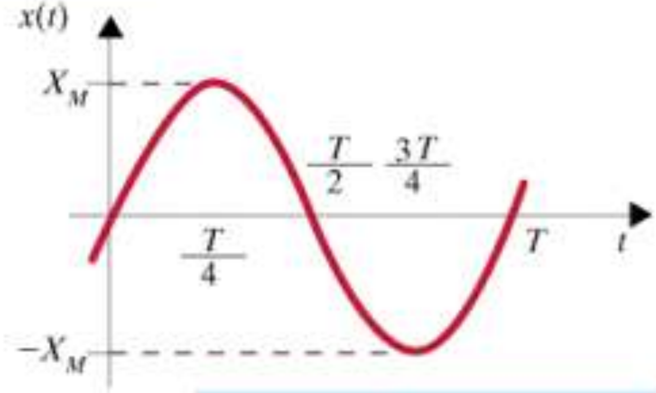
Capacitor e Indutor...

Quem estava adiantado e quem estava atrasado mesmo??

$x(t) = X_M \sin \omega t$



Plotagem adimensional



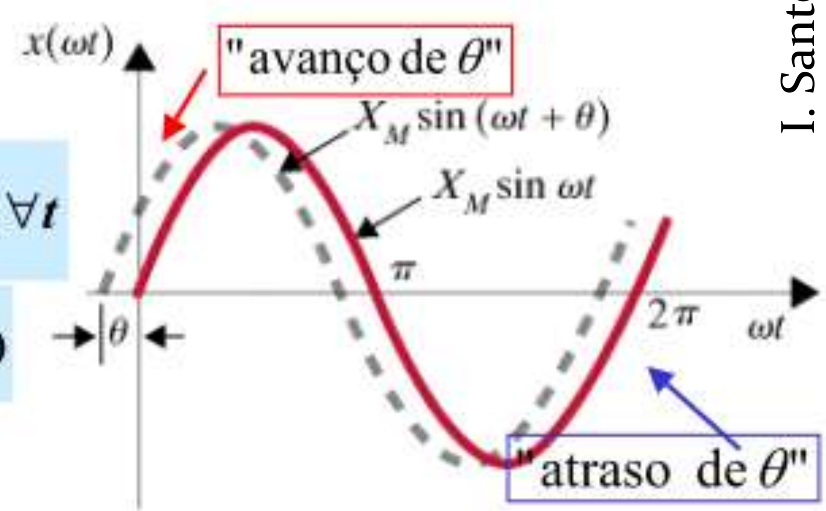
Como função do tempo

X_M = amplitude ou valor máximo
ω = freqüência angular (rad/s)
ωτ = argumento (radianos)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \text{ Período} \Rightarrow x(t) = x(t+T), \forall t$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \text{freqüência em Hertz (ciclos/s)}$$

$$\omega = 2\pi f$$



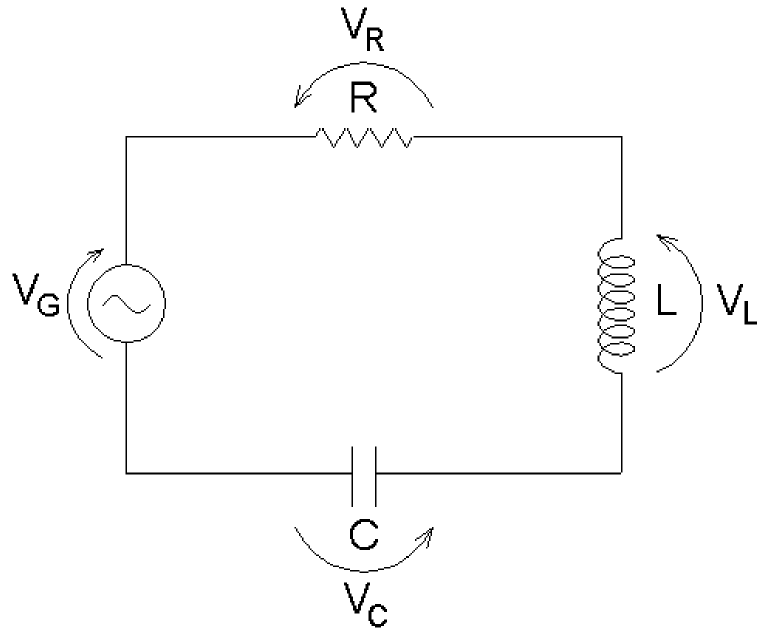
I. Santos, UNB (2008)

Circuito RLC

- Já sabíamos tudo sobre capacitores
- Agora sabemos tudo sobre indutores

O próximo passo é obvio... Vamos juntar tudo!

Dado um sinal de entrada $V_g(t)$, qual a tensão em cada um dos elementos e qual a corrente no circuito?



Circuito RLC

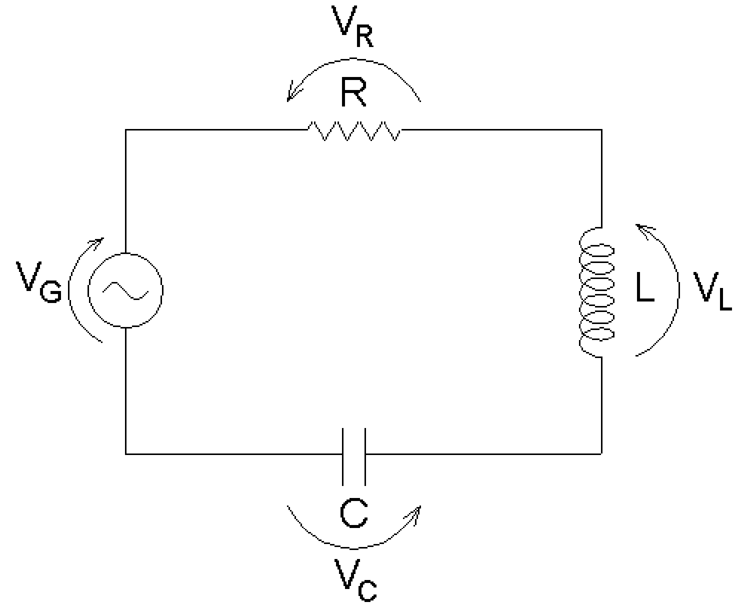
A equação básica é:

$$V_L(t)+V_R(t)+V_C(t)=V_G(t)$$

No indutor temos:

$$V_L(t)=L\frac{di}{dt}=L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

$$V_G(t)=V_0\cos(\omega t)$$



No resistor temos:

$$V_R(t)=Ri(t)=R\frac{dq(t)}{dt}$$

No capacitor temos:

$$V_C(t)=\frac{q(t)}{C}$$

A Equação do Circuito RLC

Substituindo tudo na equação se obtém:

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=V_o\cos(\omega t)$$

A solução para **q(t)** é a solução geral da homogênea mais uma solução particular da equação acima.

- Solução da homogênea
  - comportamento transitório do circuito (quando ele é ligado ou desligado): oscilador harmônico amortecido
- Solução particular
  - comportamento em regime estacionário, depois que o comportamento transitório desaparece: oscilador forçado

A dedução não vai ser feita em detalhe aqui, mas pode ser encontrada no capítulo 2 de Mecânica de K. R. Symon e nas notas de aula do curso FAP–212, aulas 4 e 5.

Caminho mais fácil...

- Como é um **circuito em série** a impedância complexa total do circuito é a soma das impedâncias complexas de cada elemento:

$$\hat{Z} = \hat{Z}_R + \hat{Z}_L + \hat{Z}_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

- A **impedância real** será:

$$Z = \sqrt{\hat{Z}\hat{Z}^*} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

- E a **fase** será:

$$tg\phi = \frac{\mathrm{Im}[\hat{Z}]}{\mathrm{Re}[\hat{Z}]} = \omega\frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC}$$

$$\hat{Z} = Ze^{j\phi}$$

A Corrente no Circuito RLC

- Sendo a tensão de entrada: $\hat{V}_G = V_G e^{j\omega t}$
- A corrente pode ser escrito como:

$$\hat{i} = \frac{\hat{V}_G}{\hat{Z}} = i_0 e^{j(\omega t - \phi_i)}$$

- Portanto:

$$\hat{i} = \frac{V_G e^{j\omega t}}{Z e^{j\phi}} = \frac{V_G}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j(\omega t - \phi)}$$

A fase da corrente vem da impedância total.

Tensões Nos Elementos

- Agora o problema está resolvido, pois como a corrente é a mesma em todo o circuito, podemos calcular a tensão no:
  - Resistor:

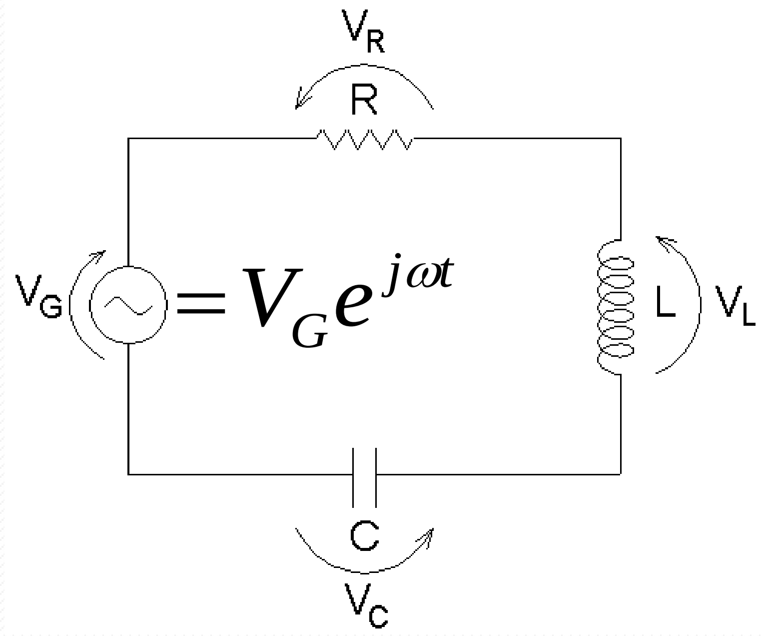
$$\hat{V}_R(t) = Ri_0 e^{j(\omega t - \phi)}$$

  - Capacitor

$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

  - Indutor:

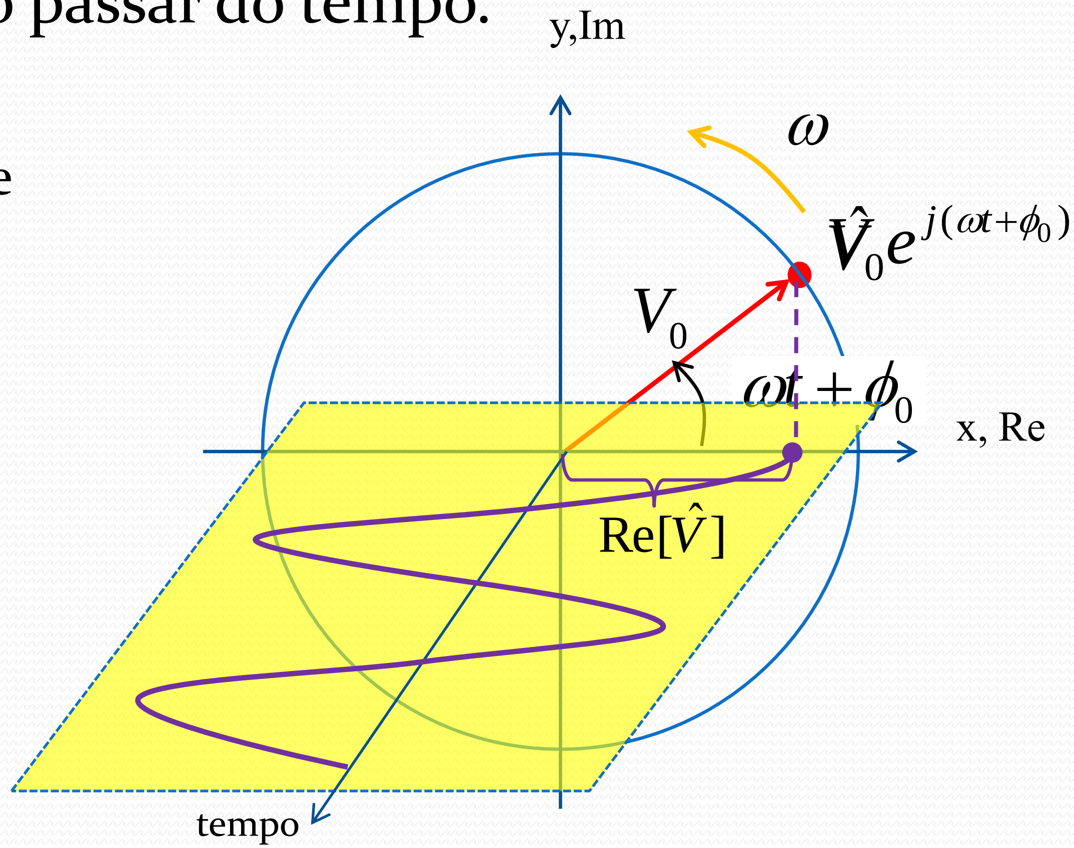
$$\hat{V}_L(t) = \omega L i_0 e^{j(\omega t - \phi + \pi/2)}$$



Fasores e Correntes Alternadas

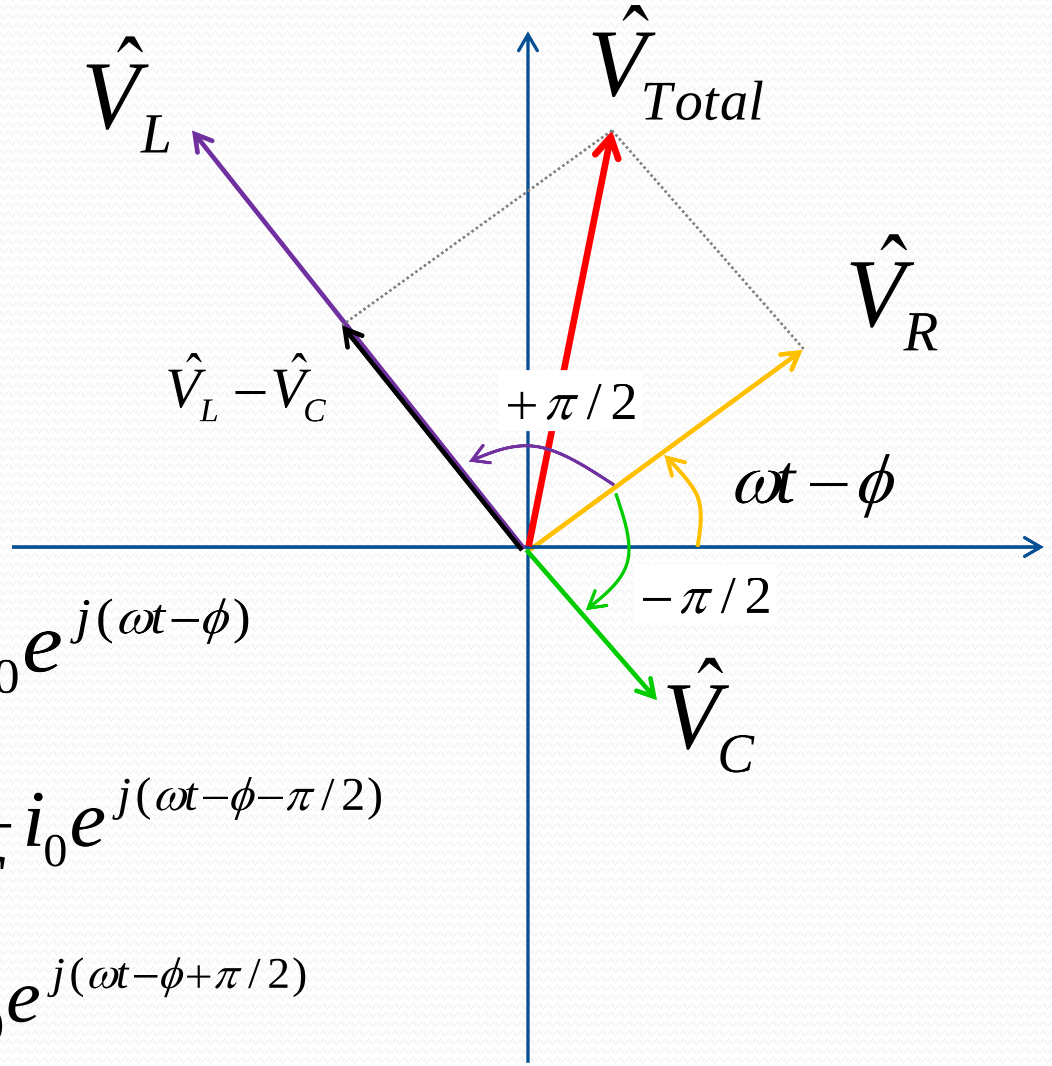
$$\hat{V}(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)} \Rightarrow \begin{array}{l} V(t) = \mathrm{Re}\left(\hat{V}(t)\right) \\ V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_0) \end{array}$$

- Mas o que esta acontecendo realmente?
  - O número complexo V(t) muda de posição no plano complexo com o passar do tempo.
  - Qual é sua trajetória?
    - Mov. Circular Uniforme



Fasores e o Circuito RLC

- Mas e o capacitor e o indutor??



$$\hat{V}_R(t) = Ri_0 e^{j(\omega t - \phi)}$$

$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

$$\hat{V}_L(t) = \omega L i_0 e^{j(\omega t - \phi + \pi/2)}$$

Ressonância em Corrente

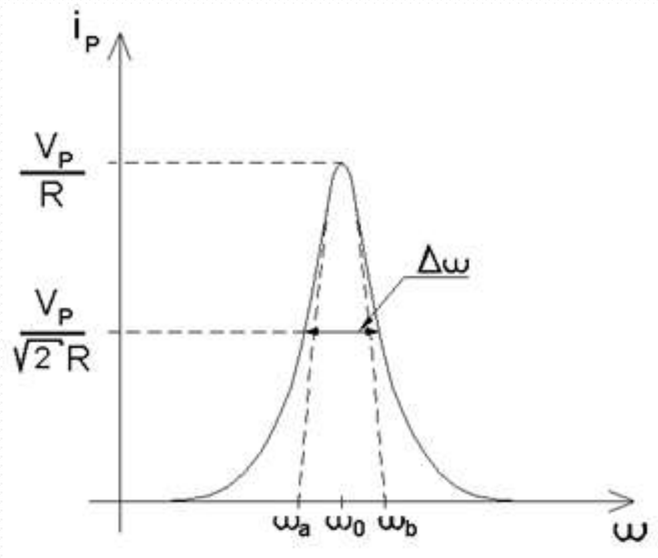
- Algo passou quase despercebido.
  - A amplitude da corrente (e de todas as tensões) depende de uma maneira bastante peculiar da freqüência.

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

  - A corrente é máxima quando:

$$\frac{di_0}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ e } \phi = 0$$



- O circuito RLC é ressonante!

Ressonância em Carga

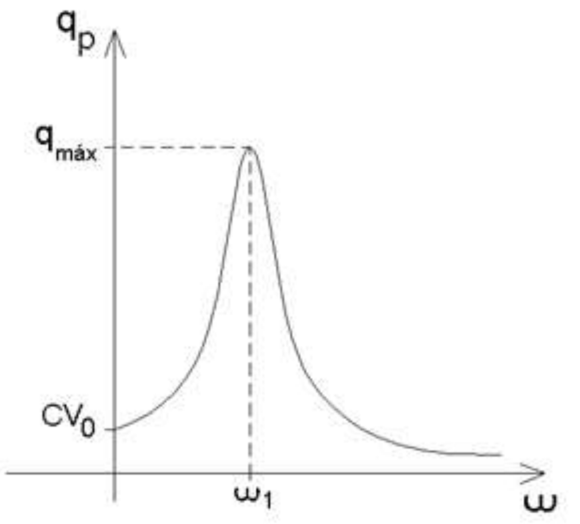
- Para a carga (tensão no capacitor) é diferente:

$$V_{C0} = \frac{i_0}{\omega C} = \frac{V_G}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

- A tensão é máxima quando, $dV_{C0}/d\omega = 0$, portanto:

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega}\left[\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\right] = 0$$

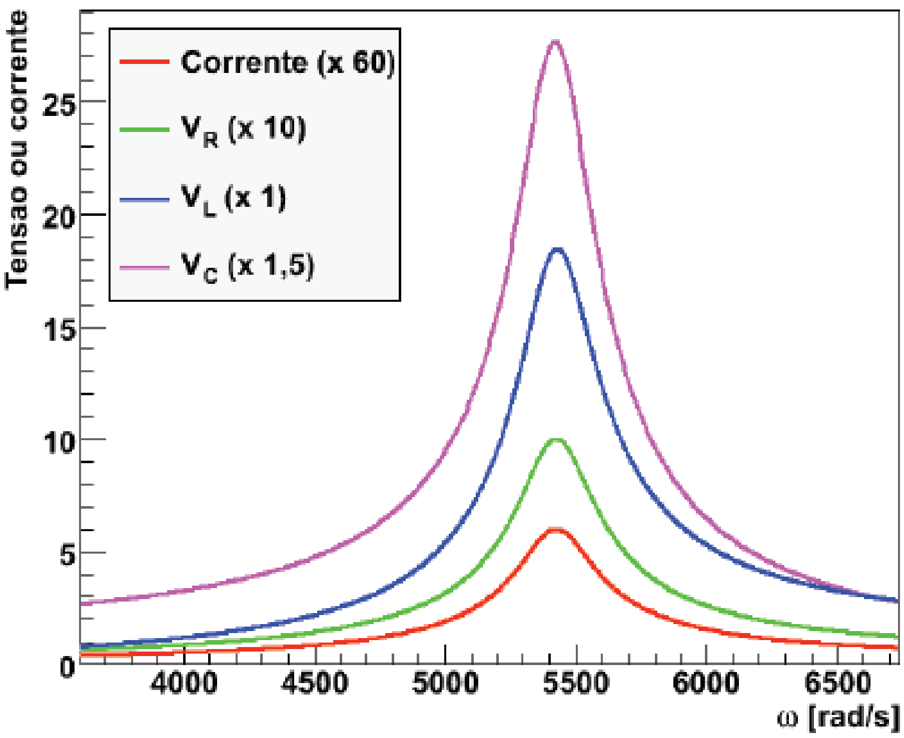
$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\omega_0 - \frac{R^2}{2L^2}}$$



- O capacitor tem carga para ω=0
- As freq. de ressonância são diferentes!
- Pergunta: podemos medir essa diferença?

Ressonância: Circuito RLC

- As tensões e correntes têm um máximo num valor definido ⇒ Ressonância



  - O que define a posição são as constantes (R, L e C)
  - A posição dos máximos não são necessariamente a mesma para todos os sinais (verifiquem o valor para a tensão no indutor)

- Mas o que define a altura e a largura dessas curvas?

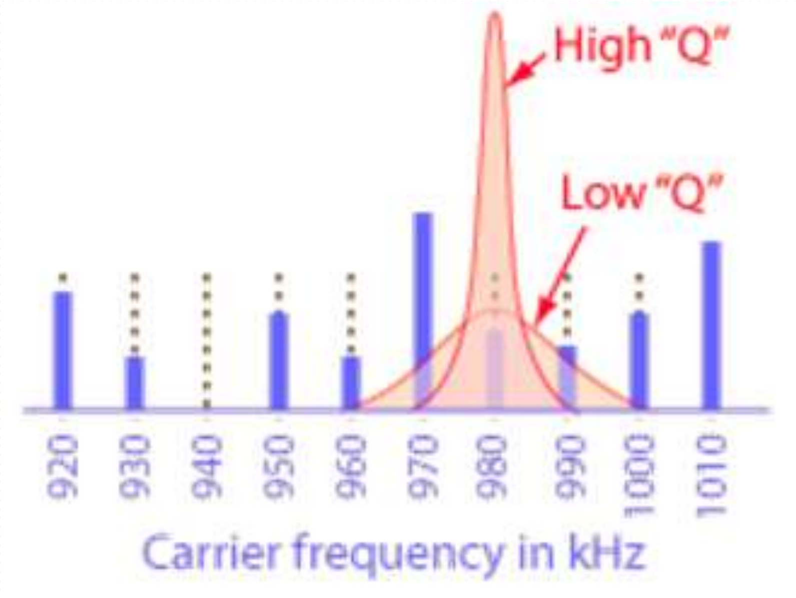
Fator de Qualidade

- Um rádio AM usa um circuitos ressonantes RLC para selecionar a estação.
  - A seleção tem que conseguir separar estações vizinhas, sem perder o sinal da estação que se quer ouvir.
  - Os engenheiros definiram o fator de qualidade:

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega} = 2\pi\left[\frac{U}{\Delta U}\right]_{ressonância}$$

U = Energia armazenada por ciclo

ΔU = Energia dissipada por ciclo



Fator de Qualidade

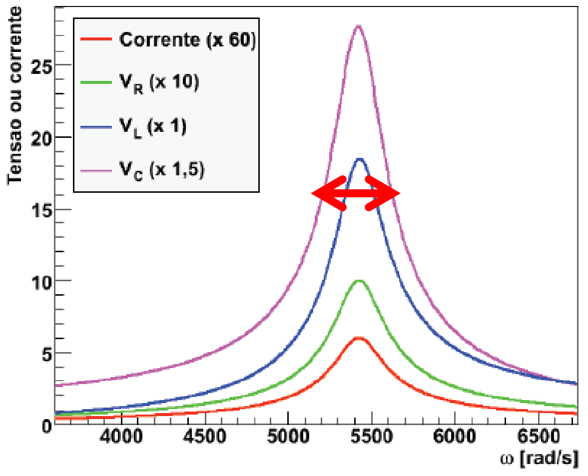
- Fator de qualidade do circuito:

$$Q = 2\pi\left[\frac{U}{\Delta U}\right]_{res} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Largura em $\begin{cases} \dfrac{i_0}{\sqrt{2}} \text{ (curva i} \times \omega) \\ \dfrac{P_0}{2} \text{ (curva Pot} \times \omega) \end{cases}$

- U é a energia armazenada no circuito na condição de ressonância:

$$U = \frac{1}{2}Li_0^2 = \frac{1}{2}CV_{C0}^2$$



- ΔU é a energia dissipada pelo circuito durante um período de oscilação:

$$\Delta U = \overline{P}T = \frac{1}{2}Ri_0^2 T$$

Potência

- A potência entregue a um bipolo é o produto entre a tensão e a corrente.

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$= V_P \cos(\omega t) \cdot i_P \cos(\omega t - \phi)$$

$$= V_P i_P \frac{1}{2}\left(\cos(2\omega t - \phi) + \cos(\phi)\right)$$

- no caso de correntes alternadas, o que vai interessar saber é a potência média dissipada num ciclo, em cada um dos elementos

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_P i_P}{2}\cos(\phi)\,dt + \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_P i_P}{2}\cos\left(2\omega t + \phi\right)dt}_{=0}$$

$$= \frac{1}{2} V_P i_P \cos\phi$$

Ressonância em Energia

- Portanto a potência média absorvida pelo circuito **RLC** (veja também a apostila de **Corrente Alternada**) pode ser escrita como:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} V_{G0} i_0 \cos\phi = \frac{V_{G0}^{\;2}}{2Z_0} \cos\phi$$

- Na condição de ressonância, **ϕ=0** e **Z_0=R**, portanto, a potência média **por ciclo** vai ser **máxima**:

$$\overline{P} = \frac{V_{G0}^2}{2R}$$

O máximo da potência ocorre para a mesma freqüência em que ocorre a ressonância para a corrente.
A ressonância de corrente é também chamada de ressonância de energia.

Potência

- Resumindo:
  - Somente a resistência dissipa potência, capacitores e indutores <u>puros</u> não dissipam potência num período:
    - O que eles retiram do circuito na metade do período, eles devolvem na outra metade

- Existem capacitores e indutores puros ou ideais?
  - O capacitor é ideal e vocês verificaram
  - E o indutor, o que acham?

- Há outras resistências, além do resistor no circuito?

Circuito RLC: Dissipação de Energia

- Você pode verificar isso!
  - Na condição de ressonância de corrente, $\omega=\omega_0$ e:

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow R$$

$$tg\phi_0 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\frac{1}{R} \Rightarrow \phi_0 = 0$$

Se Φ_0=0, corrente e tensão estão em fase, o circuito é puramente resistivo

  - Portanto:

$$V_{G0} = Ri_0$$

V_{G0} é a tensão de pico aplicada pelo gerador e i_0 é a corrente de pico no circuito

  - Ou seja, se medir V_{Go} e i_o na ressonância você descobre qual é a resistência total, R, ~~do circuito~~

Quanto vale R ??

Atividades da Semana

- A freqüência de ressonância é ligeiramente diferente se observarmos a corrente, tensão no capacitor ou indutor
  - Contudo, é muito difícil quantificar experimentalmente
  - CONCLUSÃO: Vamos medir apenas uma curva de ressonância e tentar aprender o máximo possível com ela.
    - Ressonância em corrente.
- O que podemos obter da curva de ressonância?
  - Freqüência e largura
  - Fator de qualidade (Q)
    - Energia armazenada e dissipada no circuito.

Para entregar

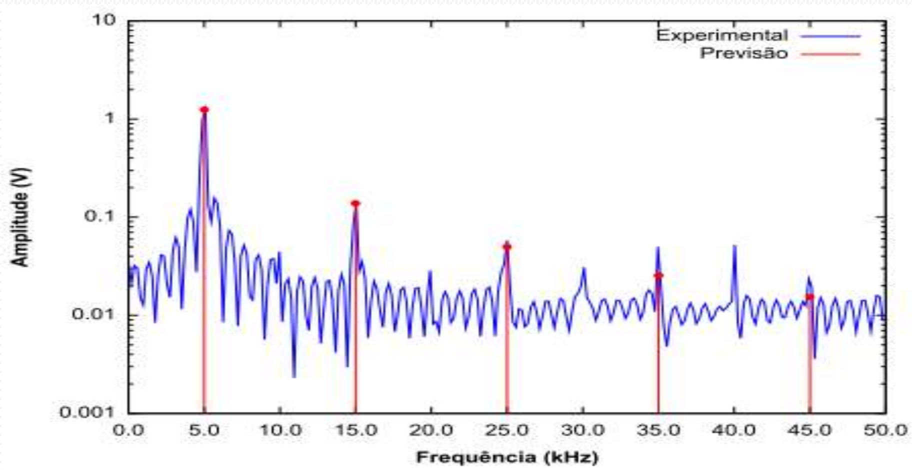
- Levantar a curva de ressonância de corrente do circuito **RLC**
  - Ajustar e Comparar com a curva teórica
    - O que usar? Ondas harmônicas simples ou quadrada + FFT ?
- Calcular a potência média dissipada por ciclo em função da freqüência
  - Obter o valor de Q e comparar com a previsão
- Na ressonância, medir V_L e V_C
  - Qual a diferença de fase entre as duas? Compare uma com a outra e ambas com a amplitude da tensão no gerador. Comente.
- Fazer isso para dois circuitos diferentes:

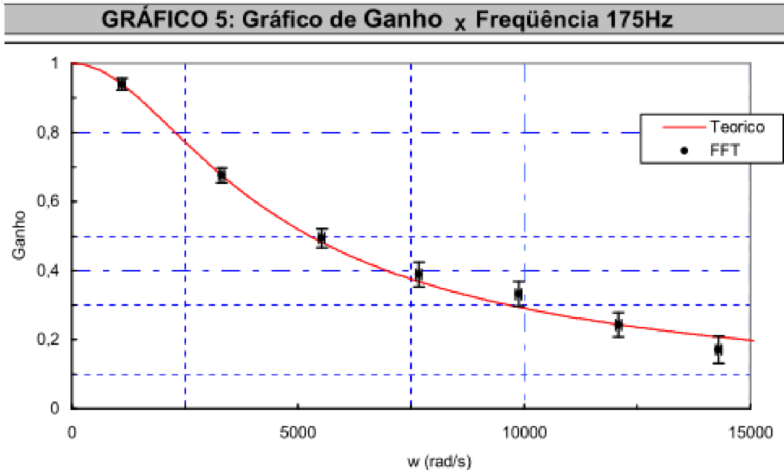
R_1=1Ω, **C=1μF** e **L=35mH**

R_1=33Ω, **C=1μF** e **L=35mH**

Como fazer a medida?

- Precisamos medir o sinal de saída em função da freqüência... Podemos usar o método da FFT?
  - Quando usamos a FFT, só determinamos em alguns pontos, não foi? Porque?
  - Medimos os pontos correspondentes aos picos, pois o ruído dos dois sinais não são correlacionados!
  - Qual a resolução que conseguimos (separação entre os picos da FFT) com uma onda quadrada?
  - Qual a largura da curva de ressonância?



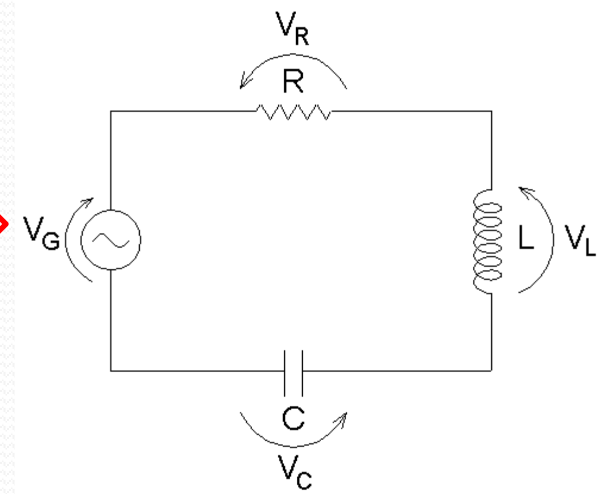


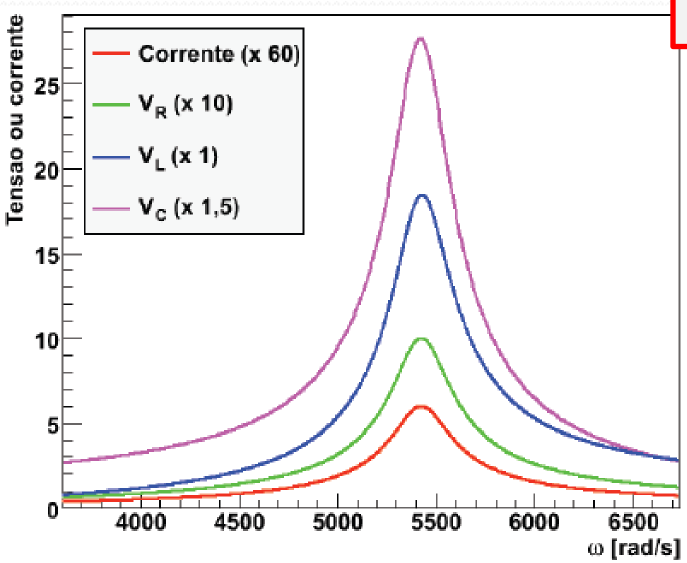
Cuidados

Usar o abaixador de impedâncias do gerador de áudio!

Será que o gerador pode ser considerado ideal? Como saber se é? O que muda na teoria se não for?

O que vão medir?
Onde colocar o terra?





Lembre-se de medir um número de pontos que permita obter curvas bem definidas