

# Física Experimental IV

Notas de aula: [www.fap.if.usp.br/~hbarbosa](http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa)

LabFlex: [www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex](http://www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex)

## Aula 1, Experiência 1 Circuitos CA e Caos

Prof. Henrique Barbosa

[hbarbosa@if.usp.br](mailto:hbarbosa@if.usp.br)

Ramal: 6647

Ed. Basílio Jafet, sala 100

# Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados
- 5 aulas
  - Noções de CA, filtro RC e circuito integrador
  - Análise de Fourier unidimensional
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

# TAREFAS SEMANA PASSADA



# Tarefas 1 – Filtro RC

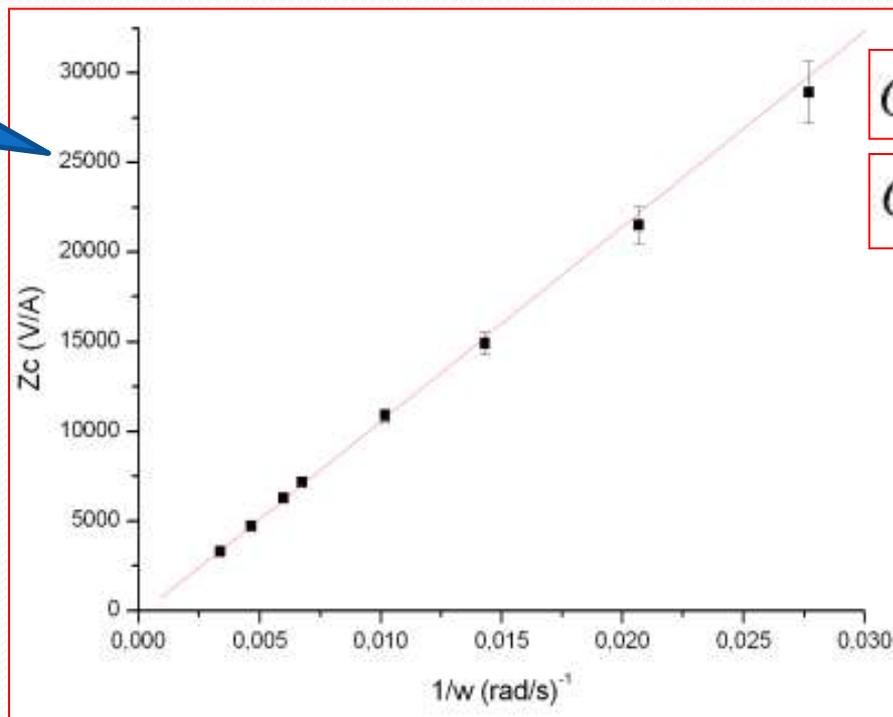
Usando um sinal de entrada senoidal, fazer:

- Gráfico de  $Z_C$  experimental em função de  $\omega$ 
  - lembre-se que  $Z = \text{Tensão} / \text{corrente} \rightarrow Z = 1 / \omega C$
  - Obter o valor da capacitância deste gráfico
- Gráfico de  $\phi_C$  (fase do capacitor) em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente para o capacitor
- Gráfico de  $G_o$  em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente
- Gráfico de  $\phi_G$  (fase entre  $V_s$  e  $V_e$ ) em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente

# Uma boa análise - Capacitor

Obteve-se através da medida direta com o multímetro a capacitância  $C_1 = 1,042 \pm 0,026 \mu F$  e a resistência  $R = 10,90 \pm 0,51 \Omega$  para os componentes utilizados no circuito RC. Com o intuito de obter outra estimativa da capacitância  $C$ , variou-se a frequência angular da fonte de alimentação, ajustada para ondas senoidais, e mediu-se tanto as amplitudes dos sinais, como os períodos e diferenças de fase.

O gráfico da impedância do capacitor  $Z_c$  em função do inverso da frequência angular  $1/\omega$  encontra-se na figura 3. O coeficiente angular obtido no ajuste linear é  $a = 1,088 \pm 0,018 \text{ } 1/mF$ , que nos fornece pela equação 1 a estimativa  $C_2 = 0,919 \pm 0,015 \mu F$  para a capacitância do capacitor. Noto que essa estimativa é ligeiramente diferente da obtida pelo multímetro.



Notação científica ?

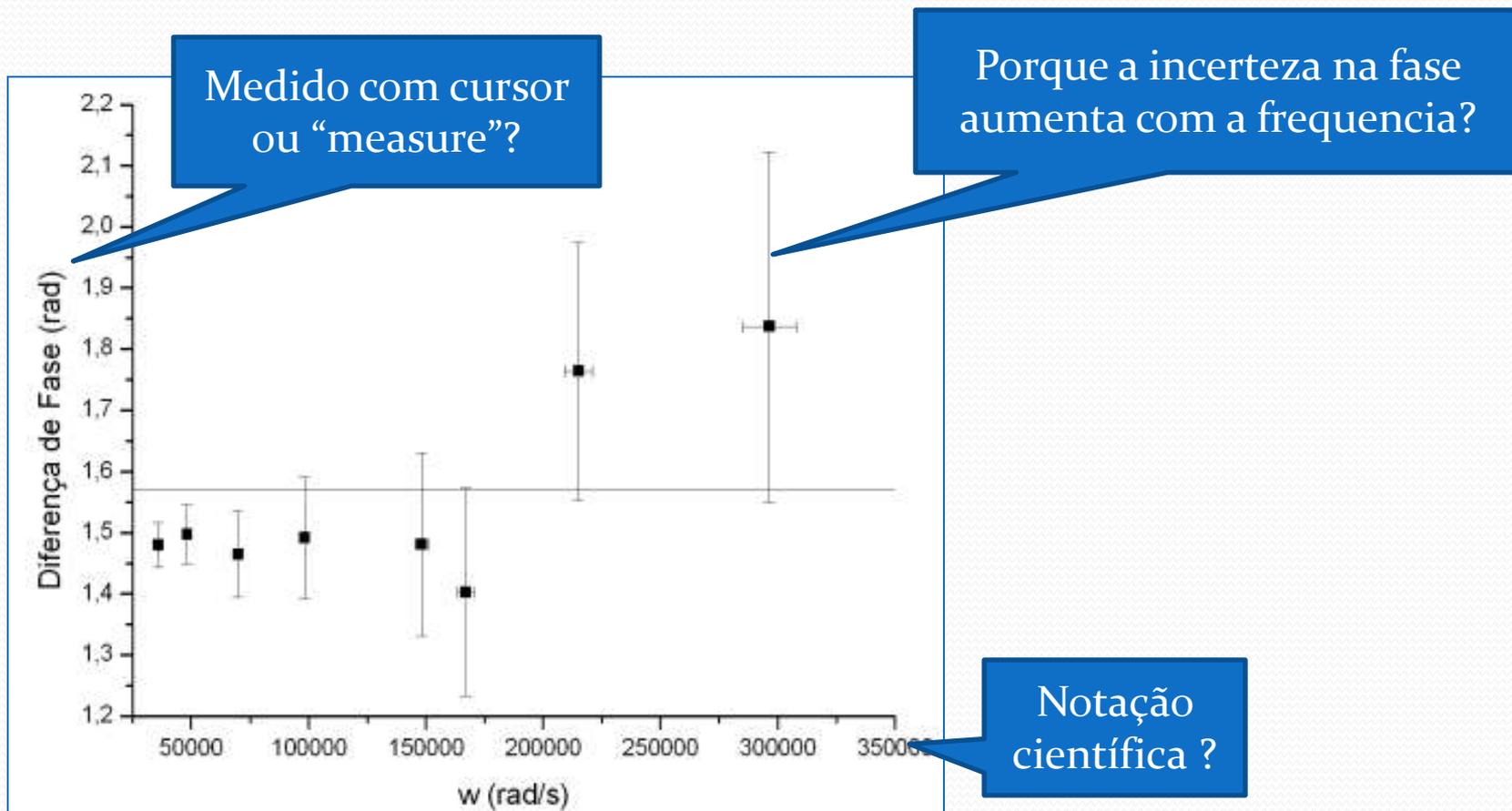
$$C_1 = 1,042 \pm 0,026 \mu F$$

$$C_2 = 0,919 \pm 0,015 \mu F$$

Coeficiente de compatibilidade?

# Uma boa análise - fase

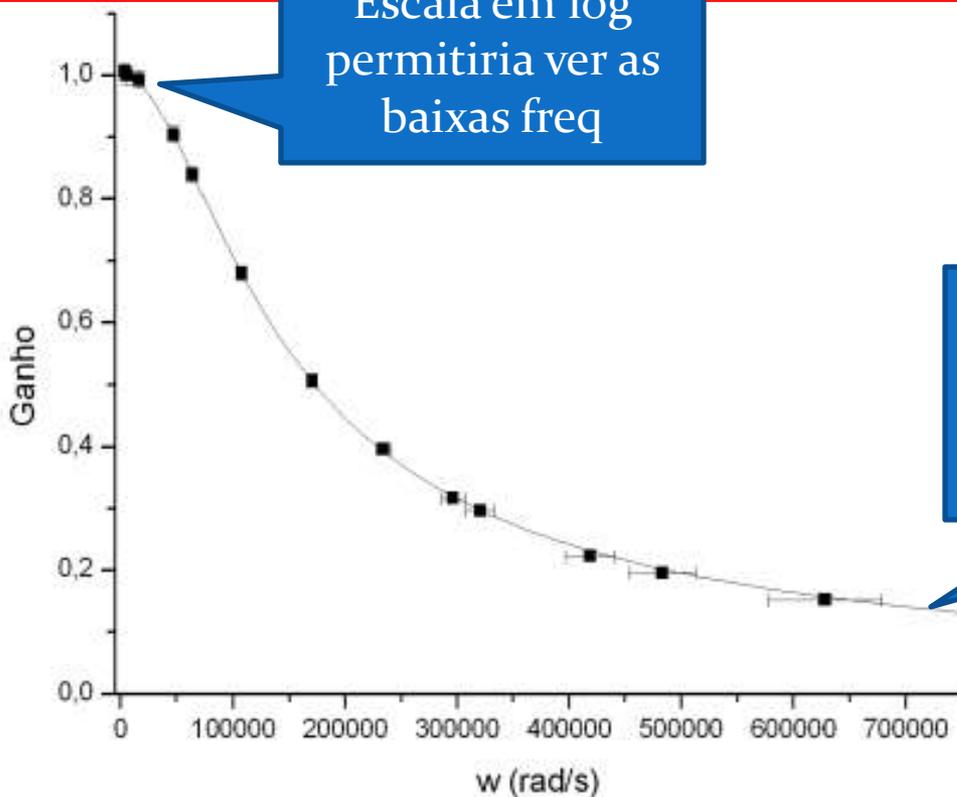
O gráfico da diferença de fase entre a corrente no circuito RC e a tensão no capacitor encontra-se na figura 4. O valor esperado para a defasagem entre tensão e corrente no capacitor é  $\pi/2$ , que é compatível em uma margem de menos de três incertezas com os valores obtidos experimentalmente, como se vê na própria figura.



# Uma boa análise - Ganho

Obteve-se também o ganho  $G_o$  do circuito RC, que se encontra no gráfico 4, assim como a comparação com a estimativa teórica dada pela equação 3, em que se considerou a frequência de corte  $\omega_c = (998 \pm 50) \cdot 10^2 \text{ rad/s}$  calculada com a capacitância  $C_2$ . A concordância entre os resultados experimentais e a estimativa teórica é clara no gráfico 4. Como se esperava pela equação 3, o ganho é aproximadamente 1 na faixa em que  $\omega \ll \omega_c$  e próximo de 0 na faixa em que  $\omega \gg \omega_c$ , tendo um rápido decaimento na região da frequência de corte.

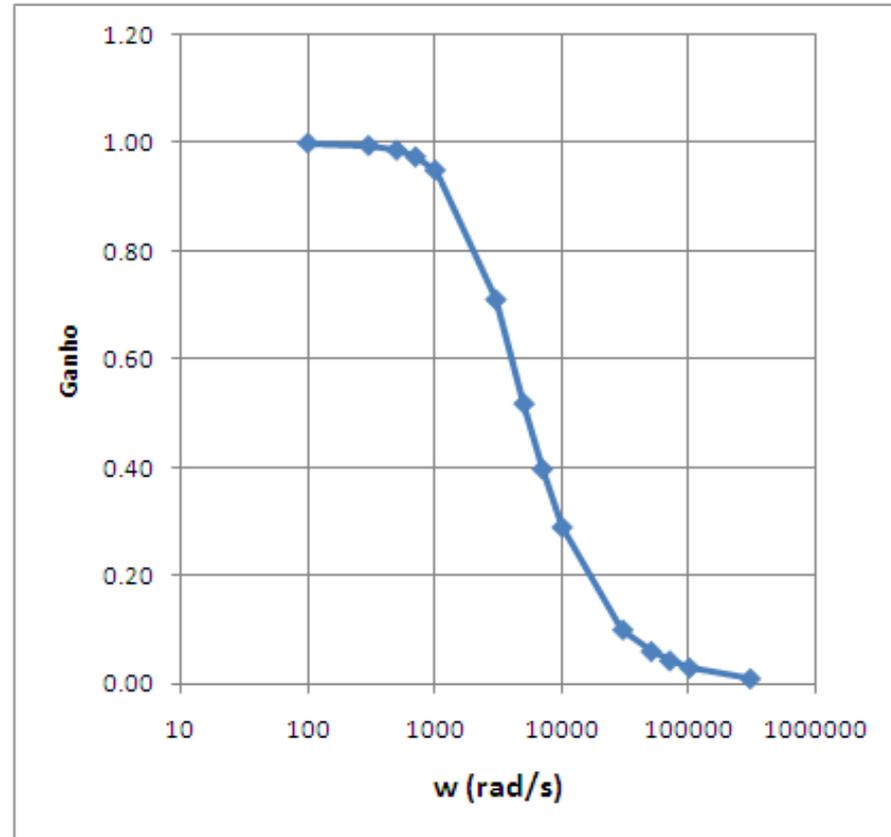
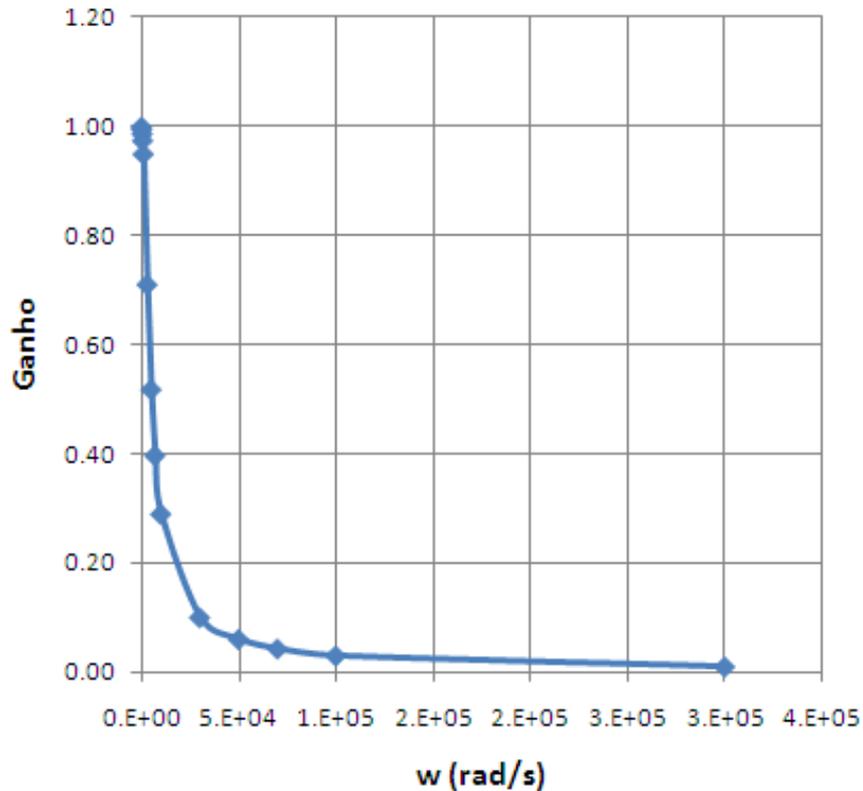
Escala em log  
permitiria ver as  
baixas freq



Essa é a curva teórica, mas e a  
curva ajustada? Não daria para  
calcular  $\omega_c$  ??

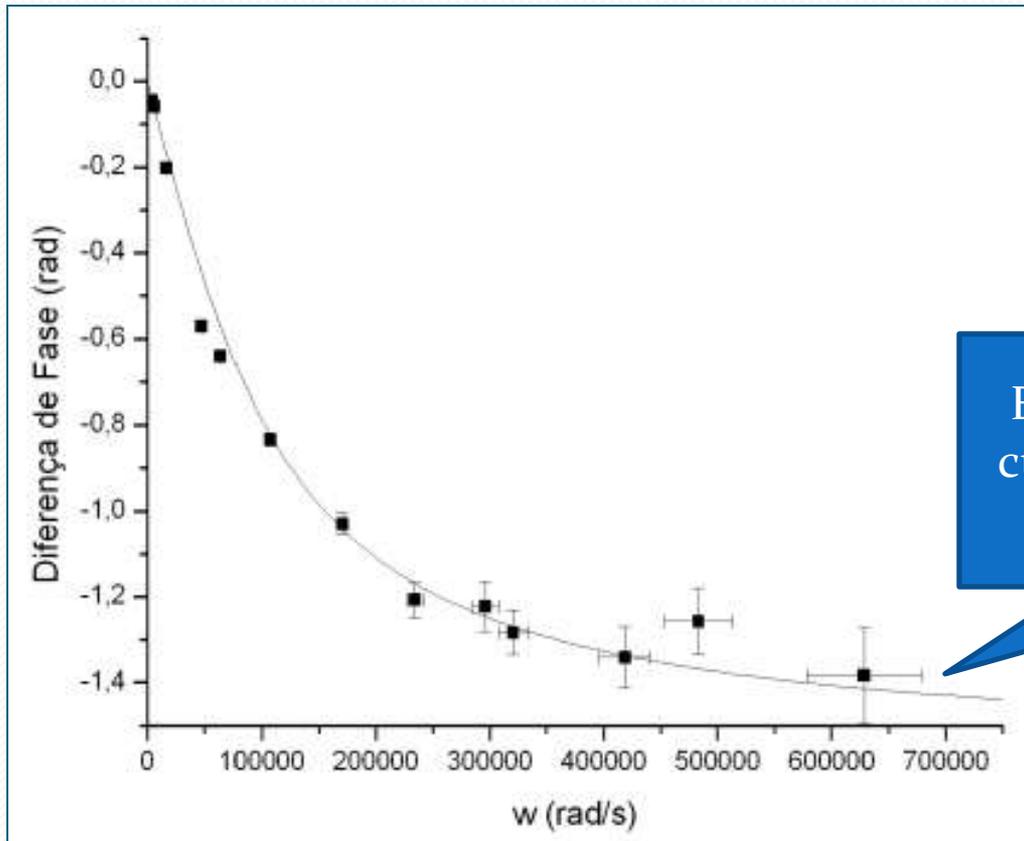
# Apresentação do gráfico

Usando uma escala logarítmica para a frequência, vemos claramente todos os pontos. Ajuda também a perceber que devemos espaçar os pontos para frequências mais altas.



# Uma boa análise – Fase do ganho

O gráfico da diferença de fase  $\phi_G$  entre a tensão de saída  $V_s$  e a tensão de entrada  $V_e$  em função de  $\omega$  encontra-se na figura 6, assim como a comparação com a curva teórica descrita pela equação 4. Como se observa na figura, os pontos experimentais se ajustam bem a previsão teórica, e  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi_G = -\pi/2$ , como também se esperava.



$$\phi_G = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_C}\right)$$

Essa é a curva teórica, mas e a curva ajustada? Não daria para calcular  $\omega_c$  ??

# Tarefas 2 - Integrador

Para frequências tais que  $\omega \gg \omega_c$ , mostrar que:

$$\hat{V}_s = \frac{1}{RC} \int \hat{V}_e dt$$

Utilizando o gerador de tensões com **ONDA QUADRADA**

- Medir  $V_s$  e  $V_e$
- Tirar foto do osciloscópio e entregar como atividade

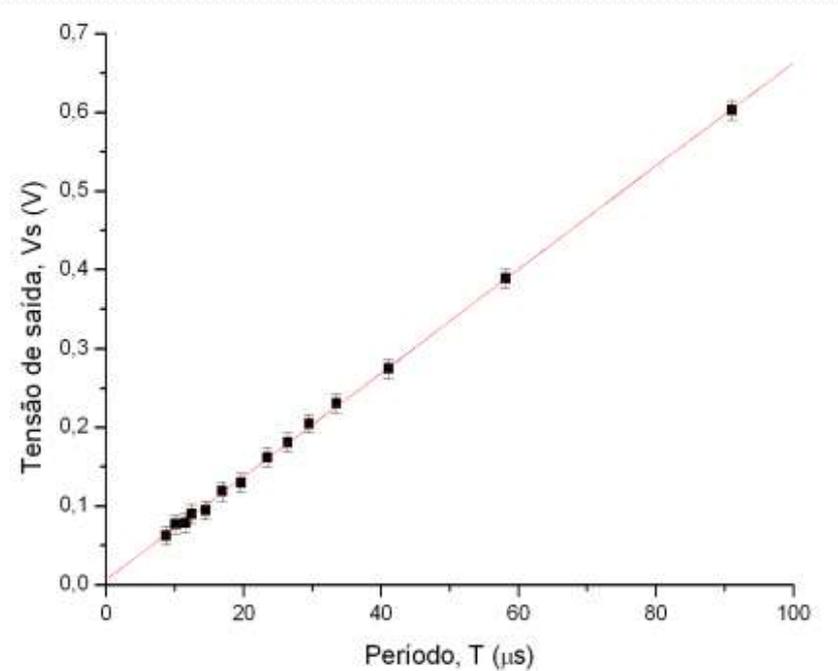
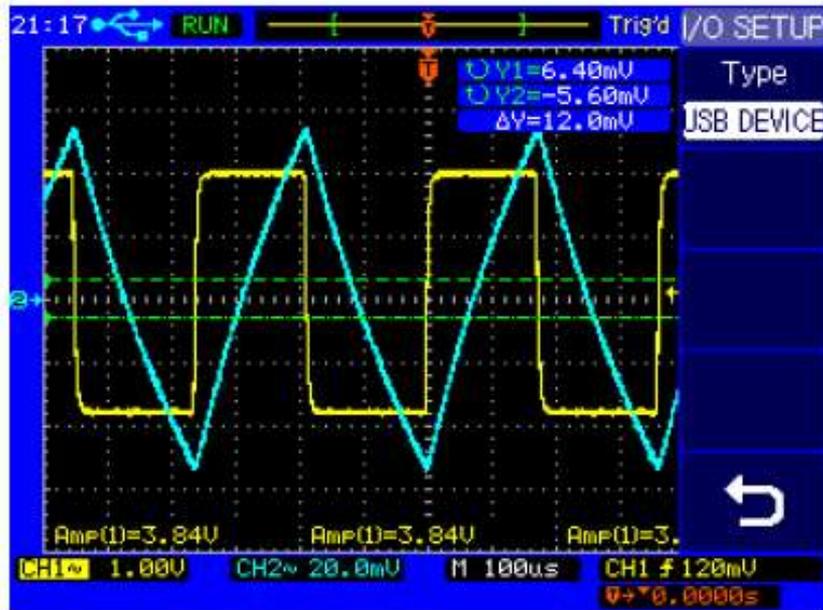
E também:

- Mostrar que  $V_s$  corresponde à integral de  $V_e$ :
- Mostrar que  $V_s$  é um triângulo
- Mostrar que a inclinação deste triângulo é compatível com a integral acima.

Determine também para qual intervalo de frequências o seu circuito é um bom integrador. Justifique.

Procure comparar os seus resultados com os do resto da sala.

# Uma boa análise - Integrador



$$V_{ps} = V_s(T/2) = \frac{1}{RC} \int_0^{T/2} \widehat{V}_e(t') dt' = \frac{1}{RC} \frac{T}{2} V_{pe}$$

Dessa forma, mediu-se a amplitude da tensão de saída  $V_{ps}$  em função da frequência angular  $\omega$  em uma região em que a condição  $\omega \gg \omega_c$  é satisfeita. O gráfico com o resultados das medidas encontra-se na figura 8, assim como o ajuste linear, que forneceu o coeficiente angular  $(6,570 \pm 0,045) \cdot 10^3 V/\mu s$ . O coeficiente angular obtido teoricamente pela expressão 9 vale  $(6,30 \pm 0,33) \cdot 10^3 V/\mu s$ , que é compatível com o obtido experimentalmente.

# Da teoria....

Como:

$$\hat{V}_s = \frac{1}{RC} \int \hat{V}_e dt$$

Então:

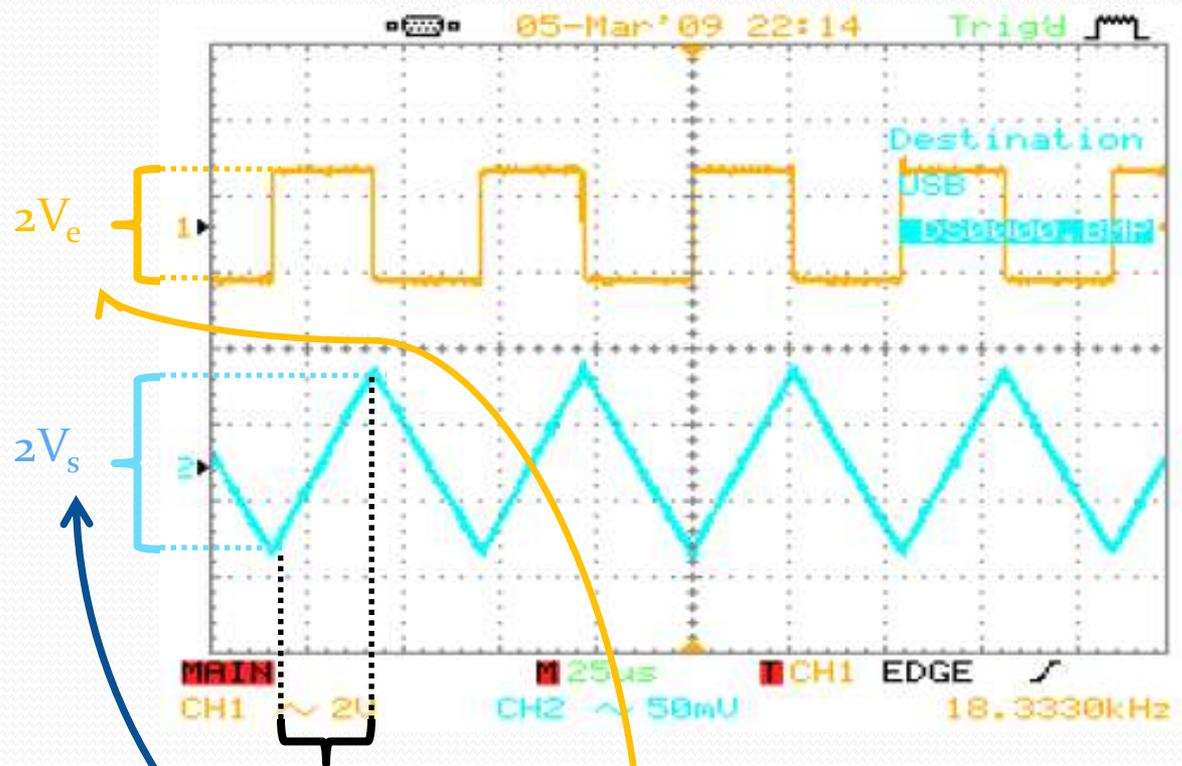
$$\frac{d\hat{V}_s}{dt} = \frac{1}{RC} \hat{V}_e$$

E como:

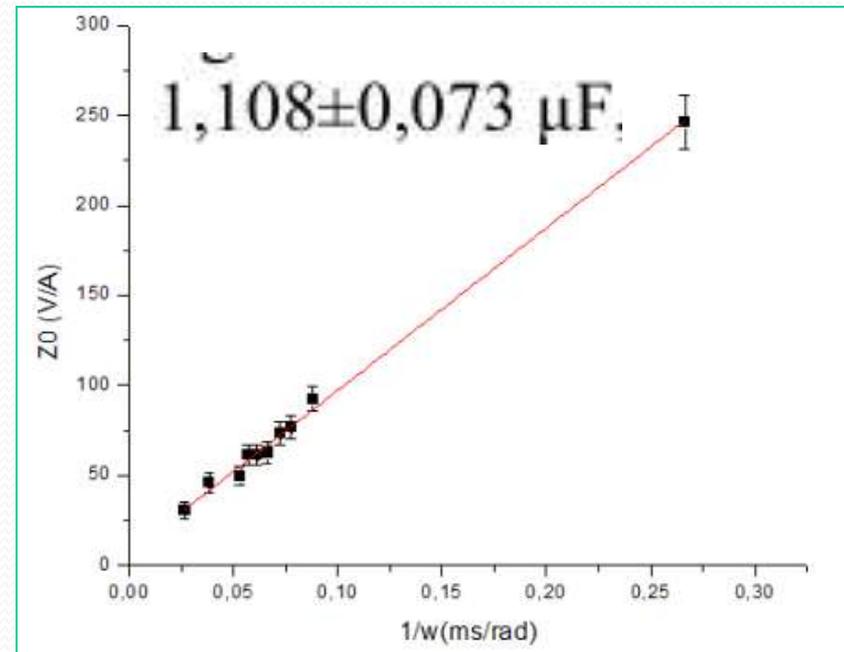
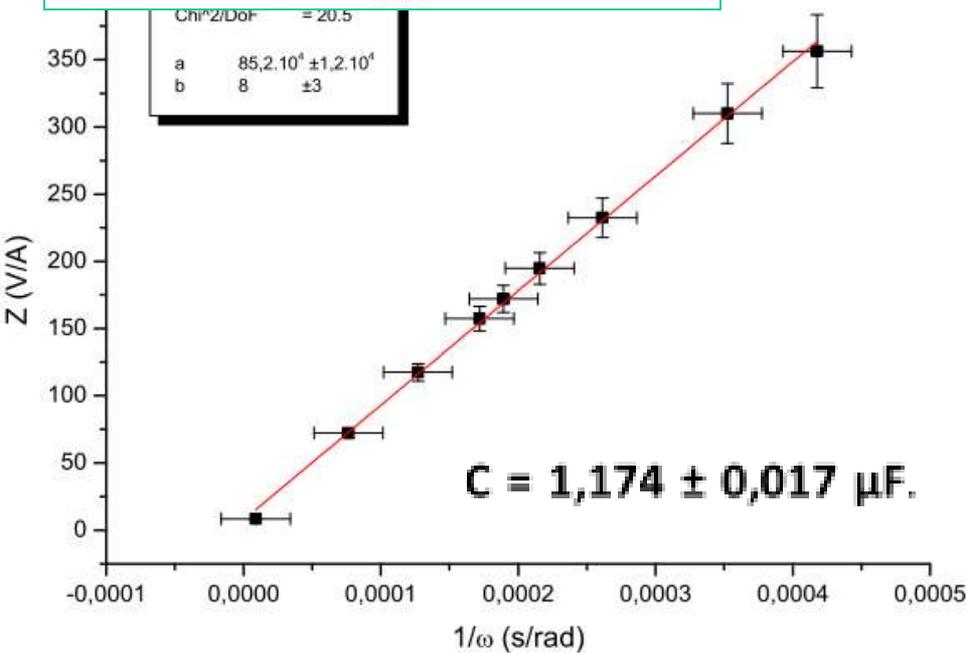
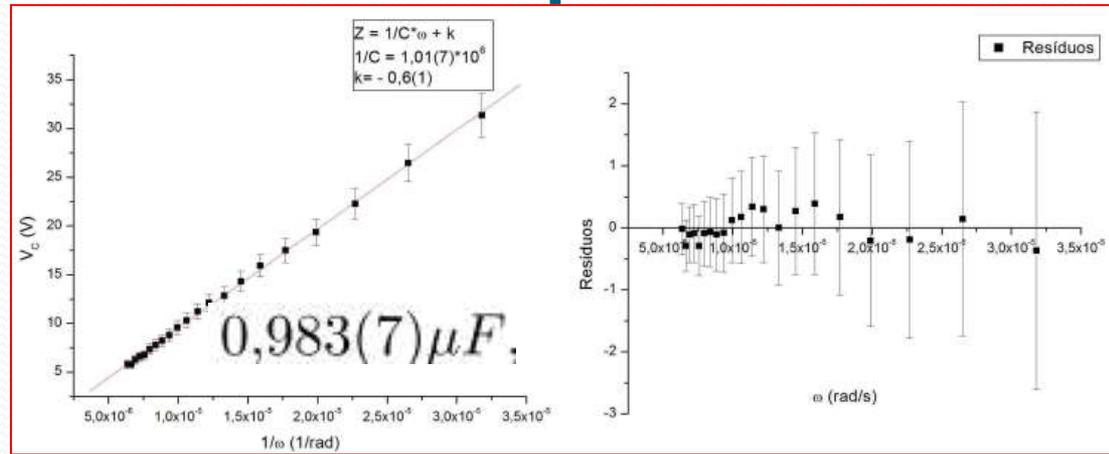
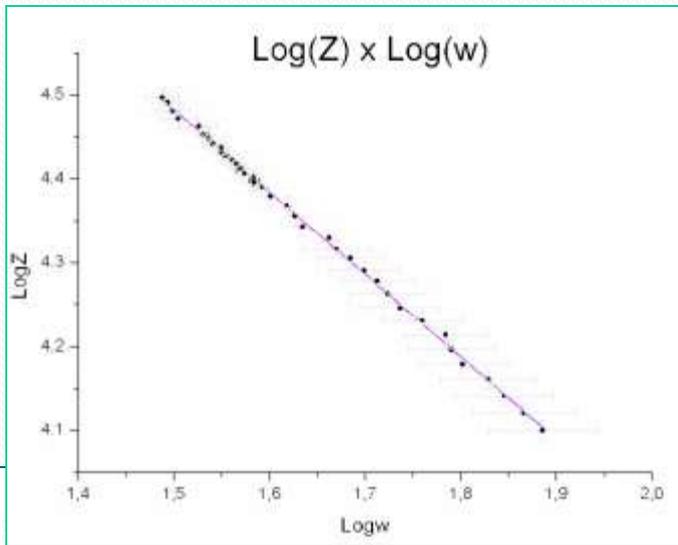
$$d\phi_s / dt = 0$$

Temos:

$$\frac{dV_s}{dt} = \frac{1}{RC} V_e \Rightarrow \text{inclinação} = \frac{2V_s}{T/2} = \frac{V_e}{RC}$$

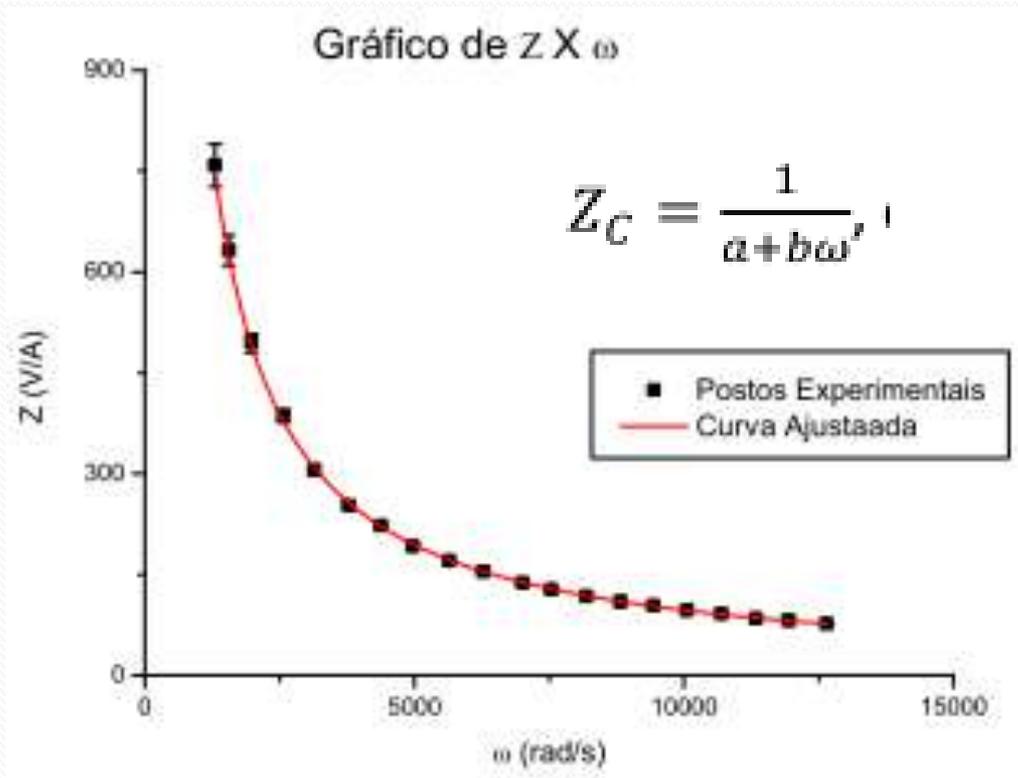


# Outros Resultados - Capacitor



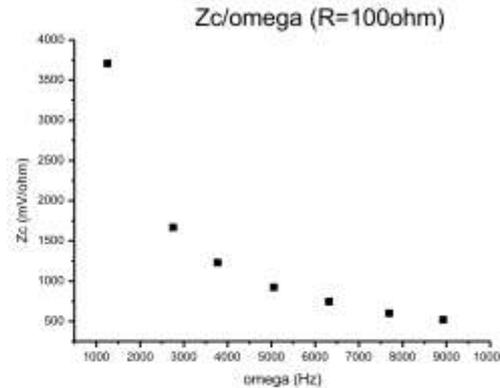
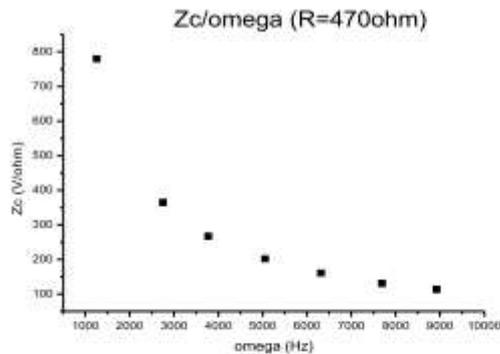
# Outros Resultados - Capacitor

Os parâmetros do ajuste estatisticamente aceitável obtido foram  $a=(0,4\pm 2,1)\cdot 10^{-5}\text{Fs}$ , compatível com zero, como o esperado teoricamente e com incerteza relativa muito grande, o que desqualifica a necessidade de seu uso no ajuste e obtemos  $b=(1,031\pm 0,004)\mu\text{F}$ , que deve

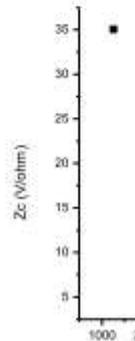


Se  $a=0$ , então deviam ter ajustado novamente...

# Várias resistências



onde estão as incertezas em  $Z_c$  e  $\omega$ ?  
e as curvas teóricas?  
e os ajustes experimentais??



Resistor 470ohm

$\omega$	$\sigma \omega$	C	$\sigma C$
1256,6	4,3	980348	49017
2752	10	1004739	50237
3770	13	1008375	50419
5052	17	1022771	51139
6315	22	1018818	50941
7691	27	1009959	50498
8922	31	1017741	50887

Resistor 100ohm

$\omega$	$\sigma \omega$	C	$\sigma C$
1256,6	4,3	44062	2203
2752	10	45844	2292
3770	13	45937	2297
5052	17	46490	2324
6315	22	46352	2318
7691	27	46094	2305
8922	31	46261	2313

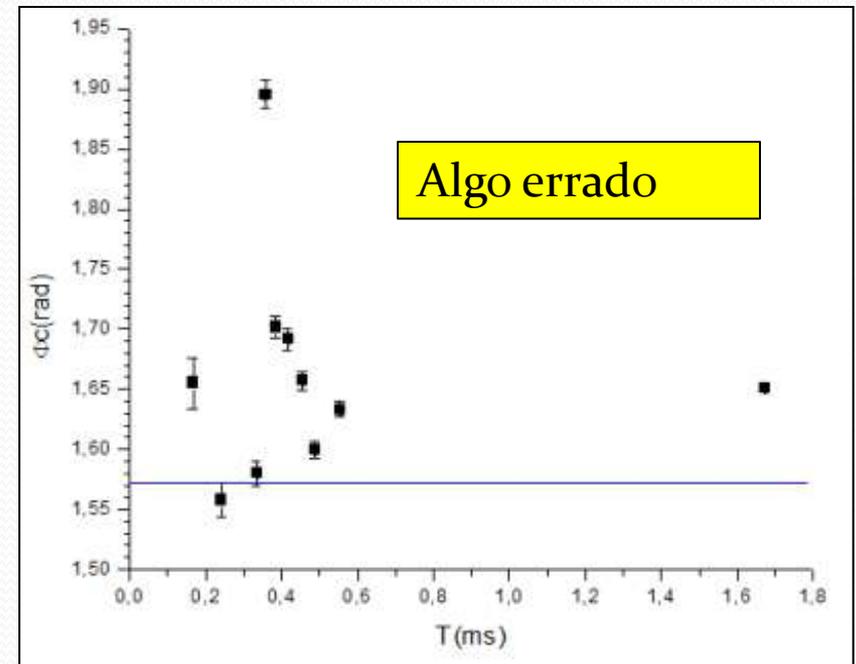
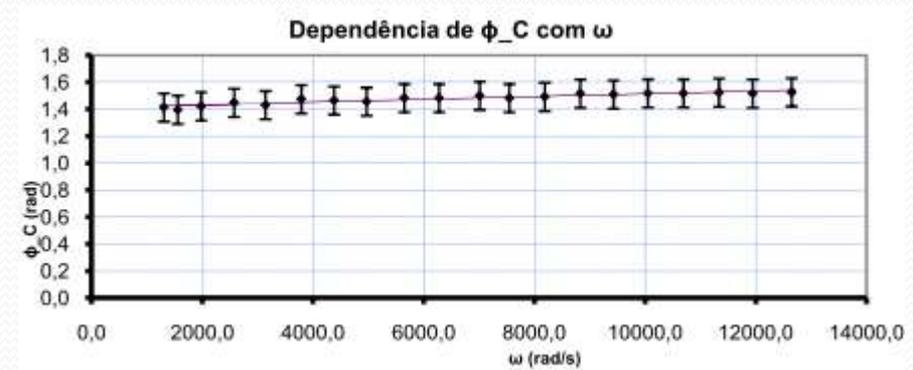
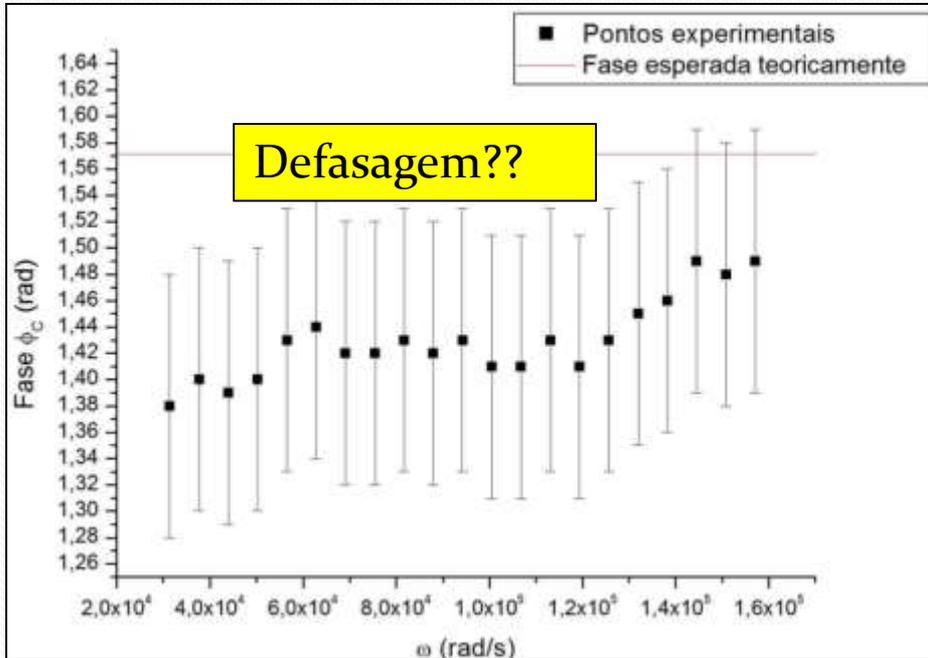
Resistor 10ohm

$\omega$	$\sigma \omega$	C	$\sigma C$
1256,6	4,3	4658407	232920
2752	10	4595175	229759
3770	13	4642269	232113
5052	17	4673799	233690
6315	22	4709009	235450
7691	27	4623314	231166
8922	31	4639504	231975

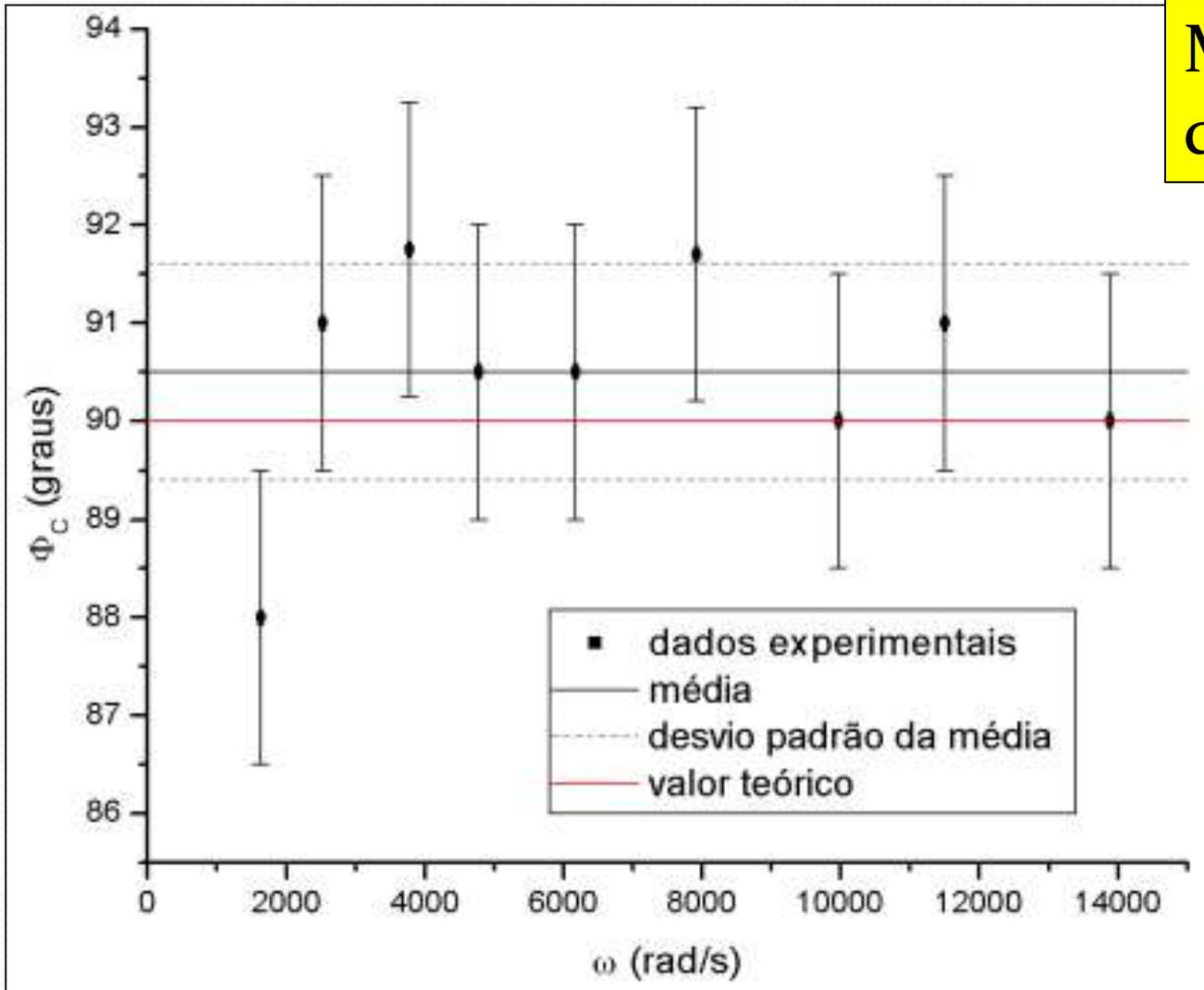
pra que fazer isso??  
Desta maneira estão usando apenas 1 ponto por vez!  
Deveriam ajustar uma curva as graficos acima.

# Outros - Fase

Melhor mostrar apenas a região de interesse...

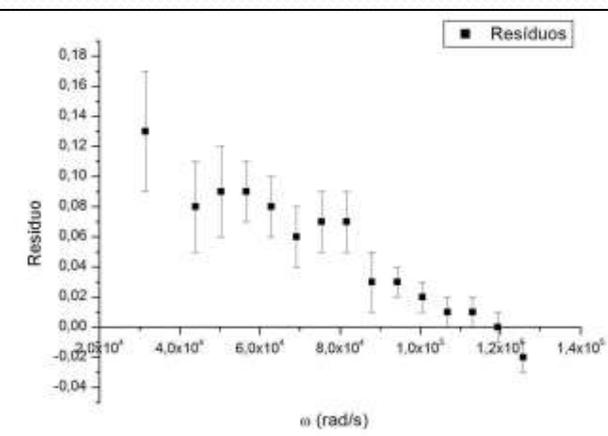
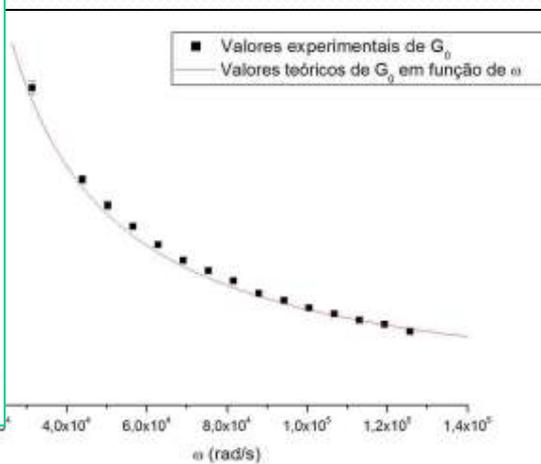
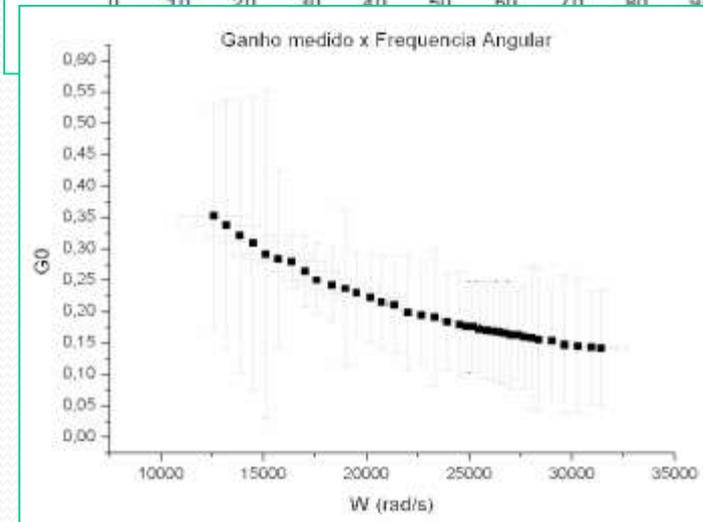
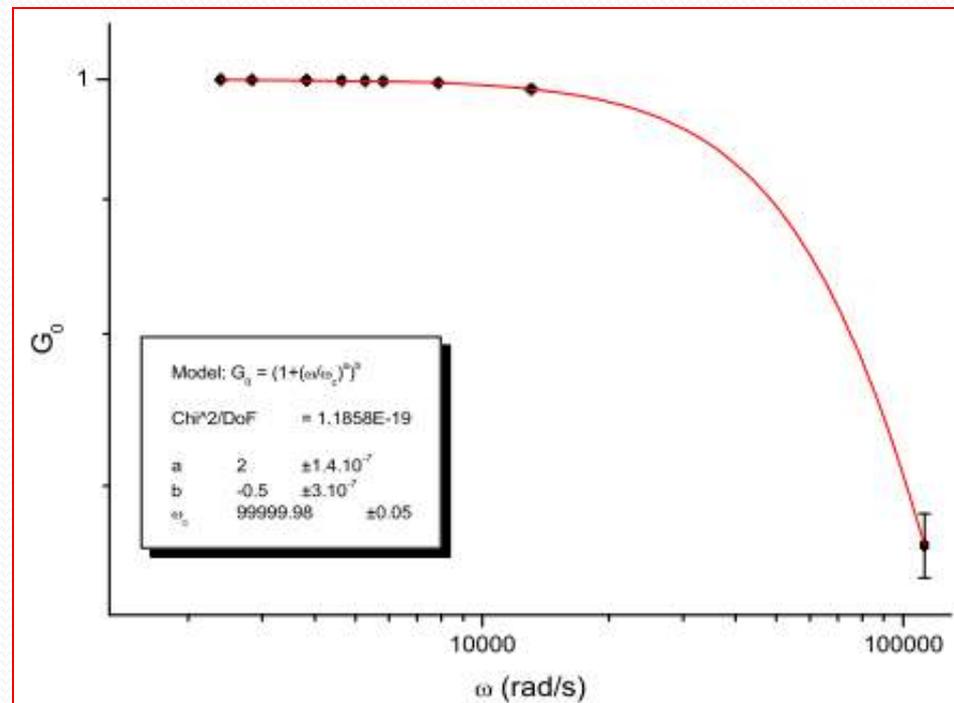
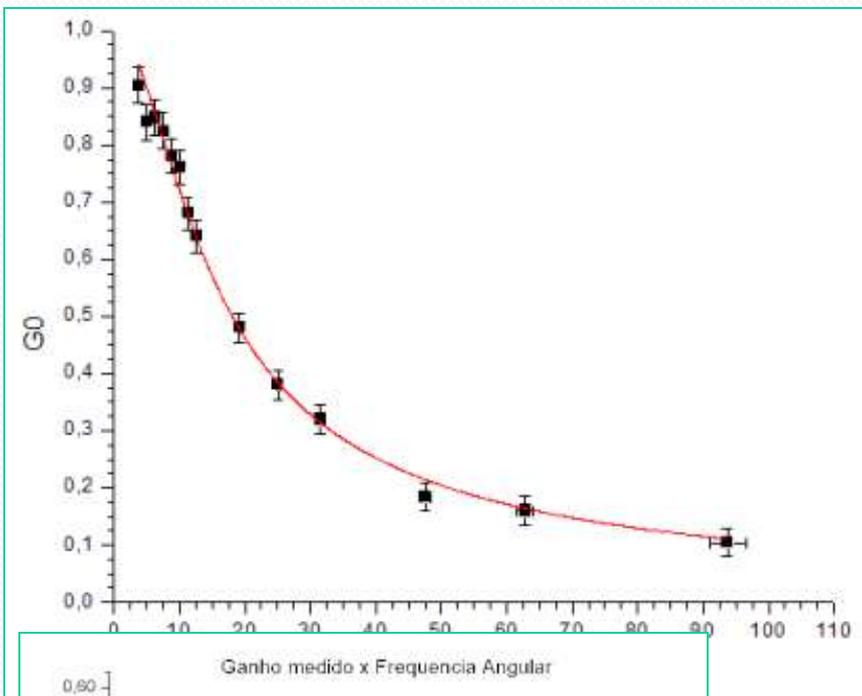


# Outros - Fase

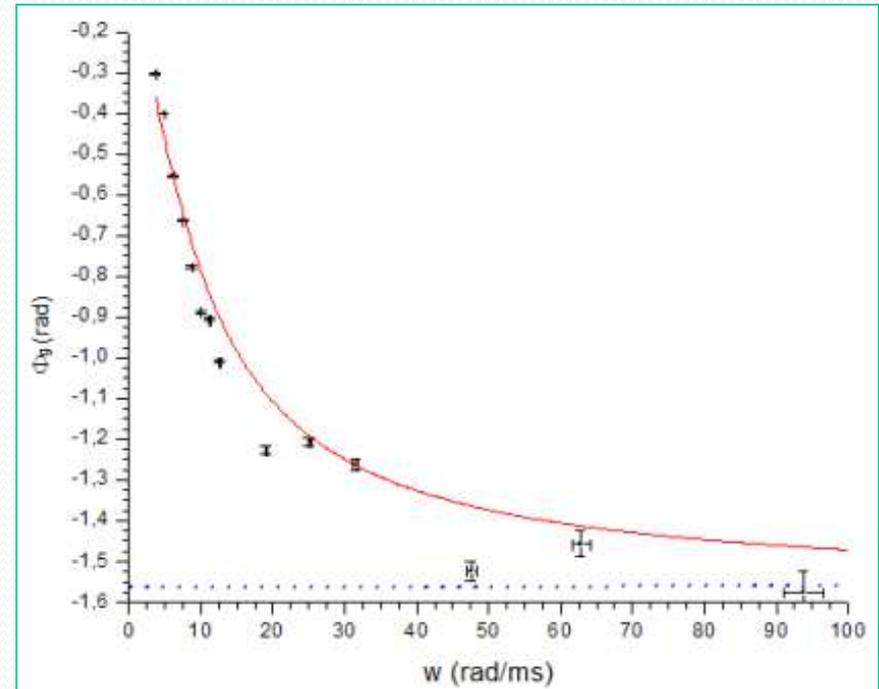
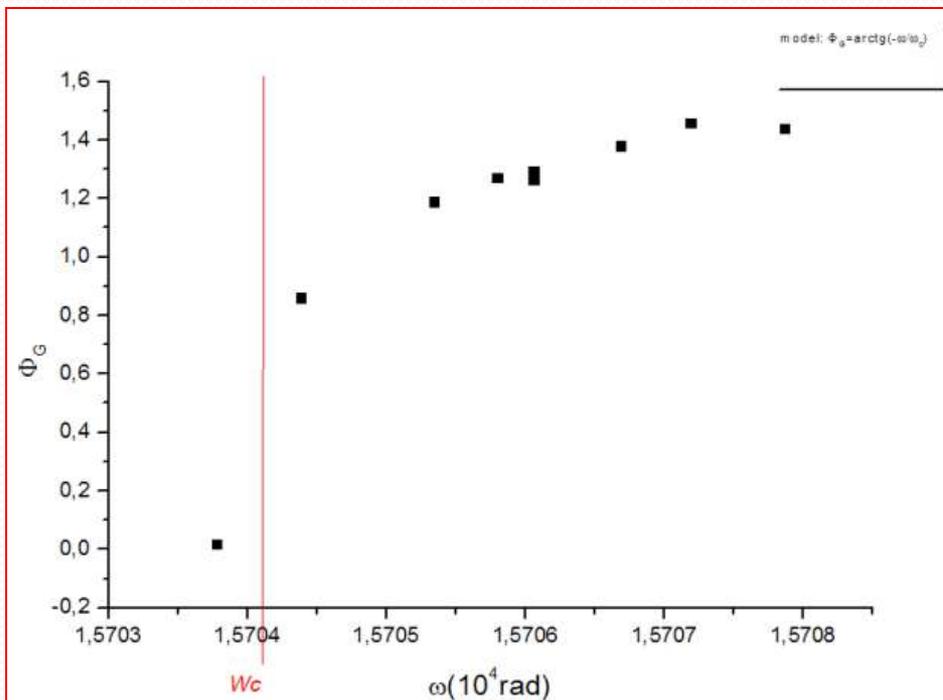


Muito bom, mas devia ser  $-\pi/2$  ...

# Outros - ganho



# Outros – Fase do ganho

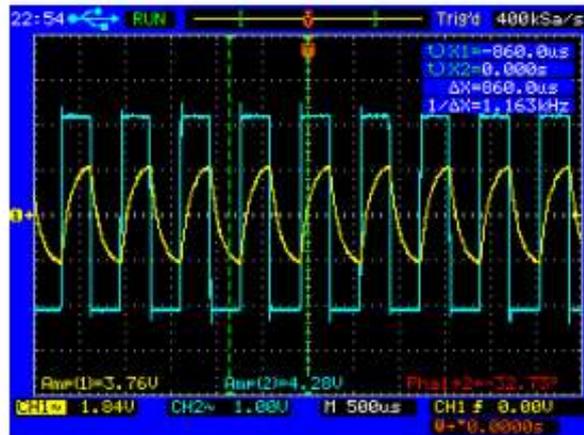


# Outros - Integrador

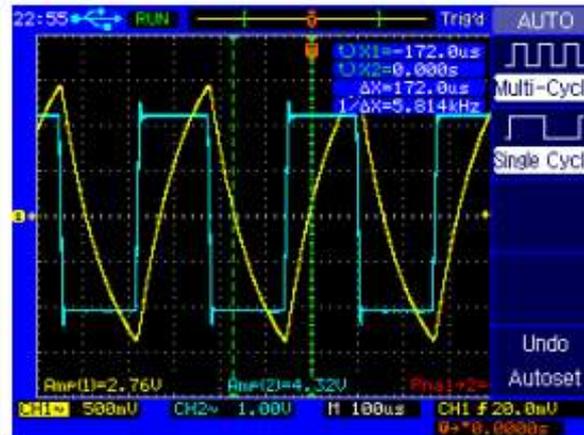


A maioria não mostrou numericamente que a saída triangular correspondia a integral do sinal de entrada quadrado.

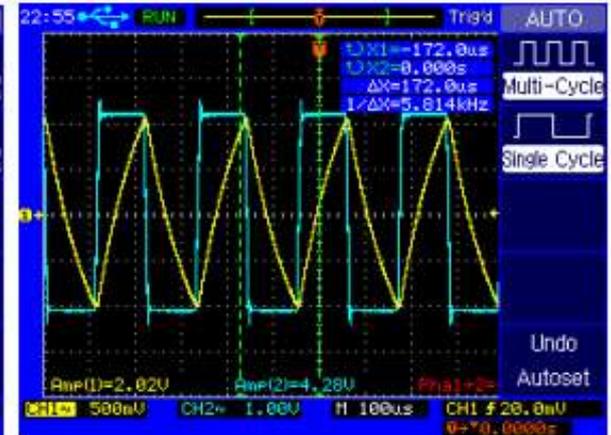
$$\omega/\omega_c \approx 1$$



$$\omega/\omega_c \approx 2$$



$$\omega/\omega_c \approx 3$$



# Capacitância ( $\mu\text{F}$ ) Nom= $1 \pm 10\%$ $\mu\text{F}$

	Multimetro	Circuito	$\omega_c$ exp ( $10^2 \text{rad/s}$ )	C $\omega_c$ ganho	C fase
H01		1.174 (17)			
H02		0.983 (7)			1.4
H03	1.042 (26)	0.919 (15)			$\sim 1.5$
H04		1.031 (4)			$\sim 1.5$
H05	0.987 (99)	1.108 (73)	104.3 (23)		-1.4
H06					
H07		1.09 (2)			
H08			20		5.5
H09		1.01408			$90^\circ$
H10		1.052 (2)	95 (5)		$90.5 (11)^\circ$
H11		0.933 (5)	107.2 (10)		1.560 (7)

# Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados
- 5 aulas
  - Noções de CA, filtro RC e circuito integrador
  - Análise de Fourier unidimensional
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

# Esta Semana...

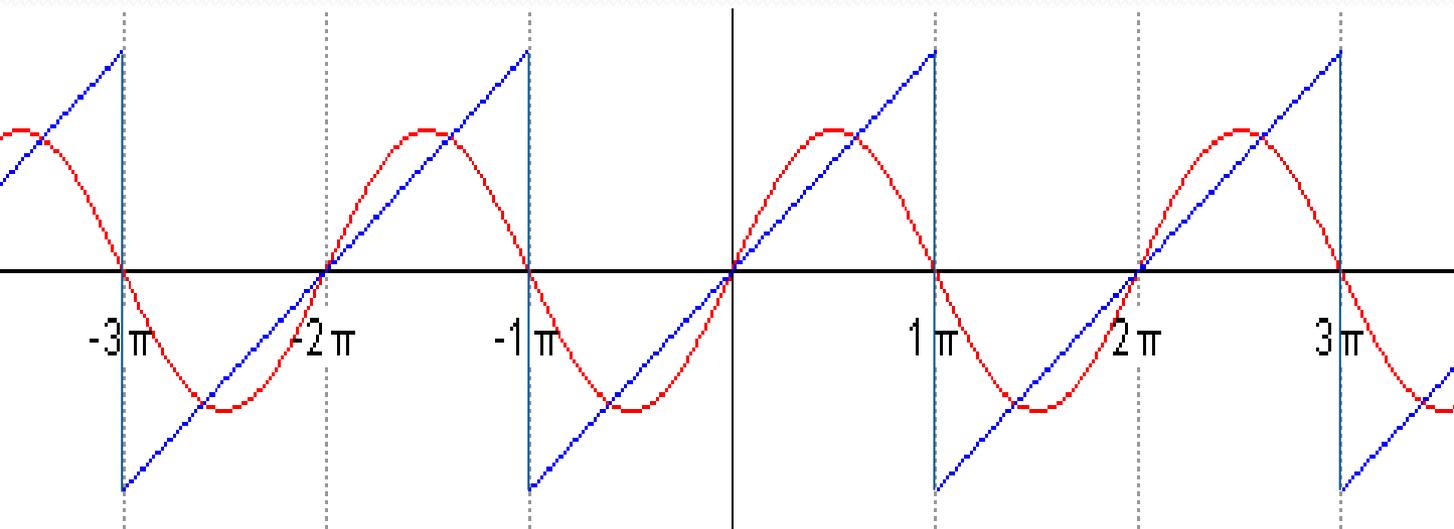


# Motivação

- A medida do Ganho  $\times \omega$  do circuito RC, semana passada, foi bastante cansativa
  - Ajustar frequência
  - Medir  $V_e$
  - Medir  $V_c$
  - Repetir procedimento para cada frequência
  - Pelo menos 1 hora de tomada de dados
- Que tal fazer a mesma medida sem precisar variar a frequência e em 5 minutos?
- Misturar sinais de alta e baixa frequência (**alta e baixa em relação a que?**) e ver se nossos filtros conseguem separar os sinais.

# Séries de Fourier

- Joseph Fourier introduziu séries infinitas de funções para resolver a equação de transferência de calor em uma placa de metal.
- Não havia solução geral, apenas particulares para fonte de calor senoidal. A idéia de Fourier foi modelar uma fonte de calor complicada como uma superposição (ou combinação linear) de simples senos ou cossenos.



# Séries de Fourier

- Joseph Fourier, paper submetido em 1807
  - Referees: Lagrange, Laplace, Malus e Legendre
    - Não foi aceito!! Ele teve que escrever um livro 15 anos depois...
  - Funções trigonométricas podem ser combinadas de tal forma a representar qualquer função matemática

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- As constantes  $a_n$  e  $b_n$  podem ser obtidas a partir de:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$



# Séries de Fourier

Hoje em dia, usamos formalismos mais abrangentes:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

Use a fórmula de Euler e substitua na expressão anterior

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

As constantes  $a_n$  e  $b_n$  da expressão tradicional podem ser obtidas como:

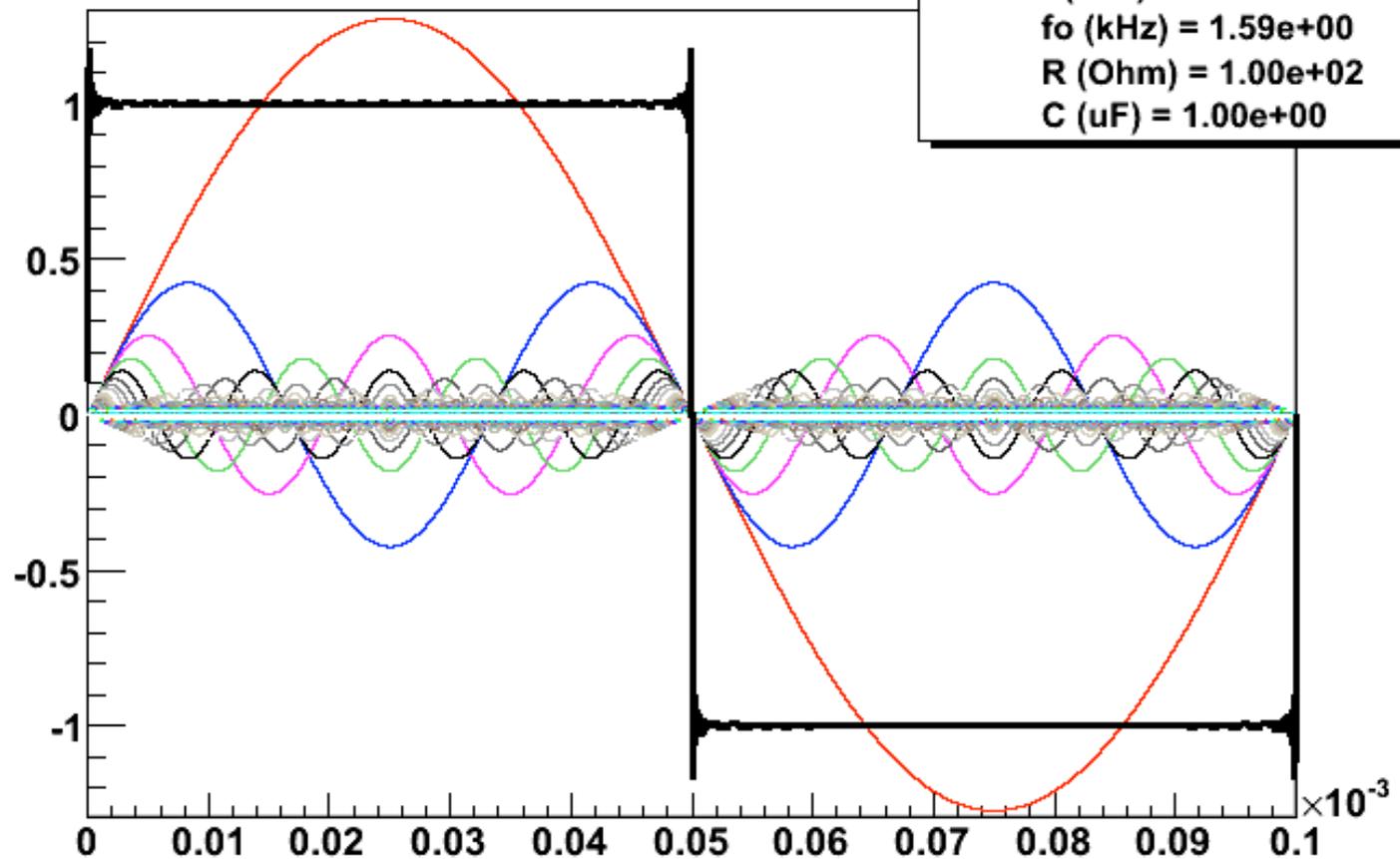
$$a_n = c_n + c_{-n}, \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}), \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots$$

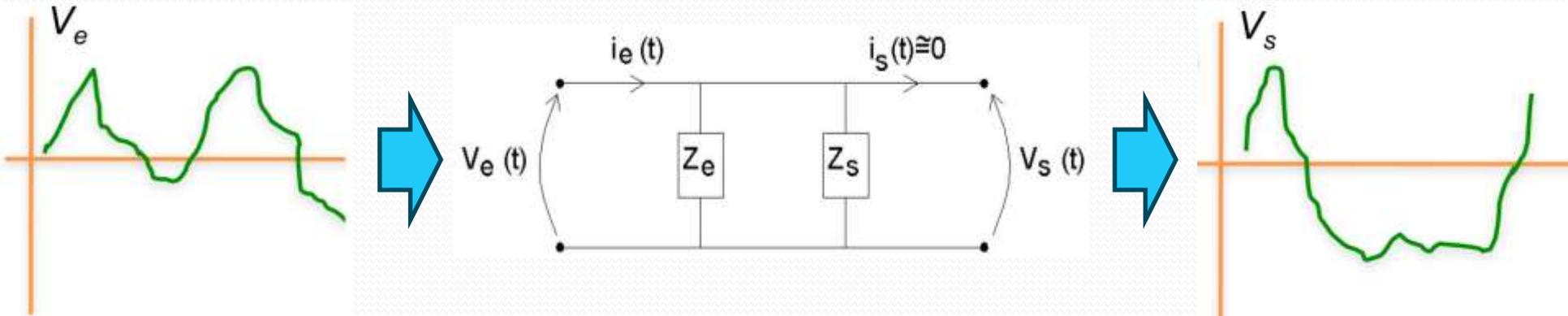
# Exemplo: Onda Quadrada

$$V(t) = V_0 \frac{4}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$

Onda quadrada N = 500

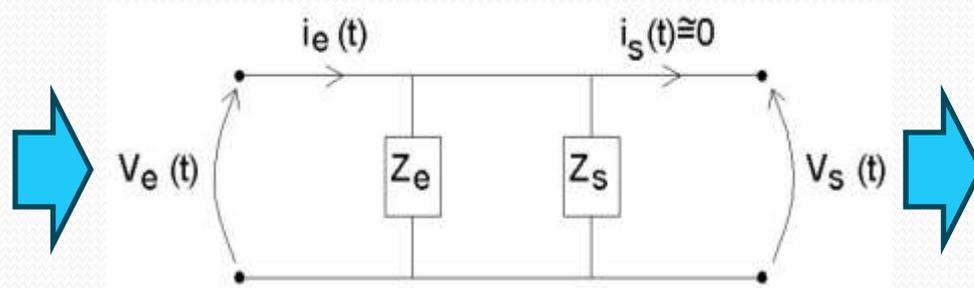
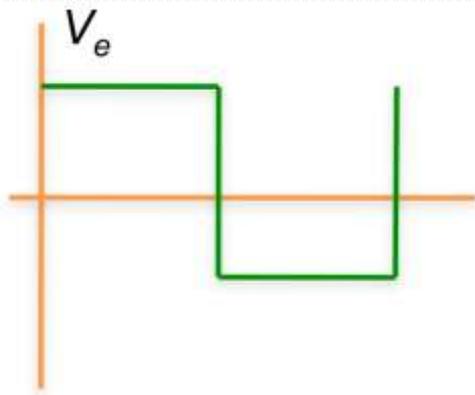


# O que o circuito faz no sinal?



$$V_e = \begin{cases} V_1^s \sin(\omega_1 t) + \\ V_1^c \cos(\omega_1 t) + \\ V_2^c \sin(\omega_2 t) + \\ V_2^c \cos(\omega_2 t) + \\ \dots + \\ V_N^s \sin(\omega_N t) + \\ V_N^c \cos(\omega_N t) \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} G_i = G(\omega_i, R, C) \\ \phi_i = \phi(\omega_i, R, C) \end{matrix} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} V_s = \begin{cases} G_1 V_1^s \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \\ G_1 V_1^c \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \\ G_2 V_2^c \sin(\omega_2 t + \phi_2) + \\ G_2 V_2^c \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \\ \dots + \\ G_N V_N^s \sin(\omega_N t + \phi_N) + \\ G_N V_N^c \cos(\omega_N t + \phi_N) \end{cases}$$

# Exemplo: Onda quadrada



?

$$V_e = \begin{cases} \frac{4V_0}{\pi} \sin(\omega t) + \\ \frac{4V_0}{3\pi} \sin(3\omega t) + \\ \frac{4V_0}{5\pi} \sin(5\omega t) + \\ \dots \end{cases}$$



$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega / \omega_c)^2}}$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}(-\omega / \omega_c)$$

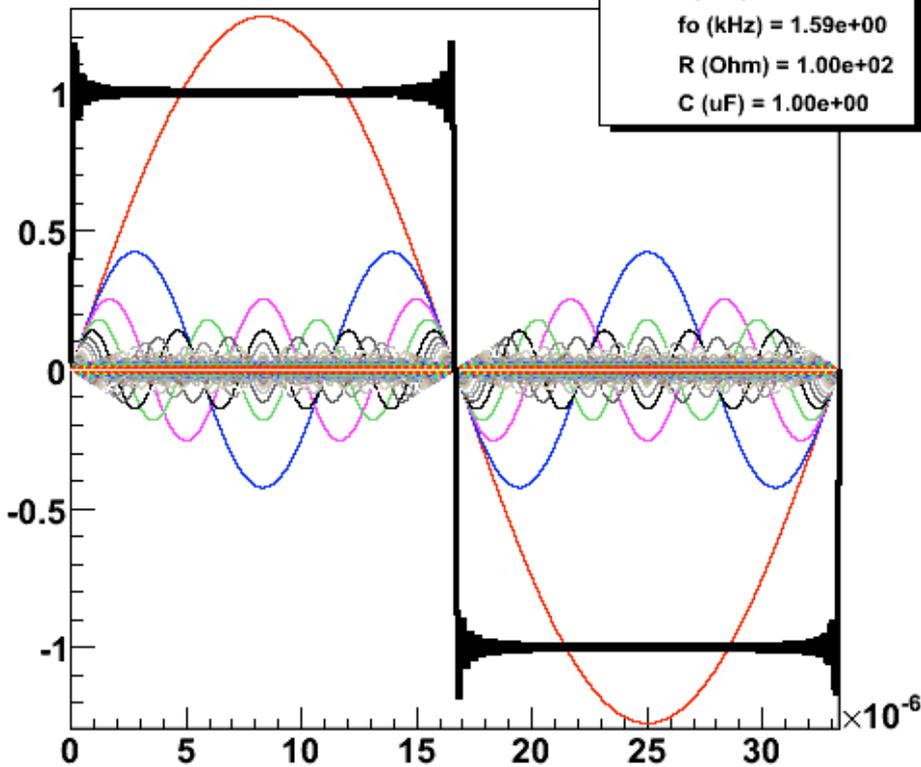


$$V_s = \begin{cases} G_\omega \frac{4V_0}{\pi} \sin(\omega t + \phi_\omega) + \\ G_{3\omega} \frac{4V_0}{3\pi} \sin(3\omega t + \phi_{3\omega}) + \\ G_{5\omega} \frac{4V_0}{5\pi} \sin(5\omega t + \phi_{5\omega}) + \\ \dots \end{cases}$$

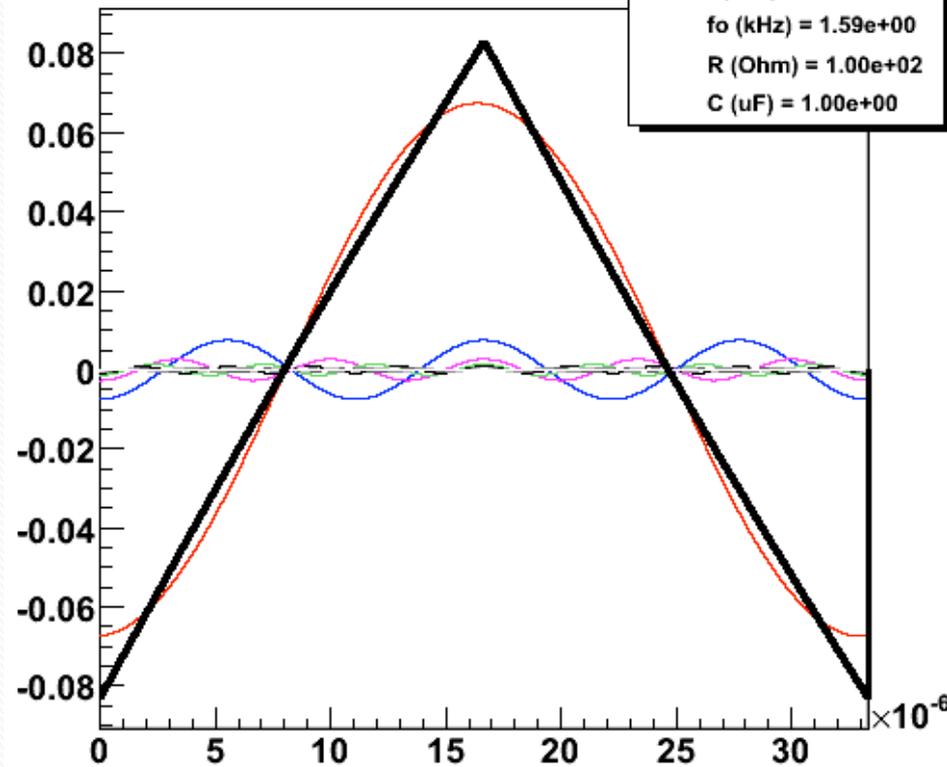
# Filtro RC ( $R=1$ , $C=1\mu\text{F}$ ) $F_c \sim 1.5\text{kHz}$

30000Hz

Onda quadrada N = 100



Onda quadrada apos filtro RC N = 100



# Resultado

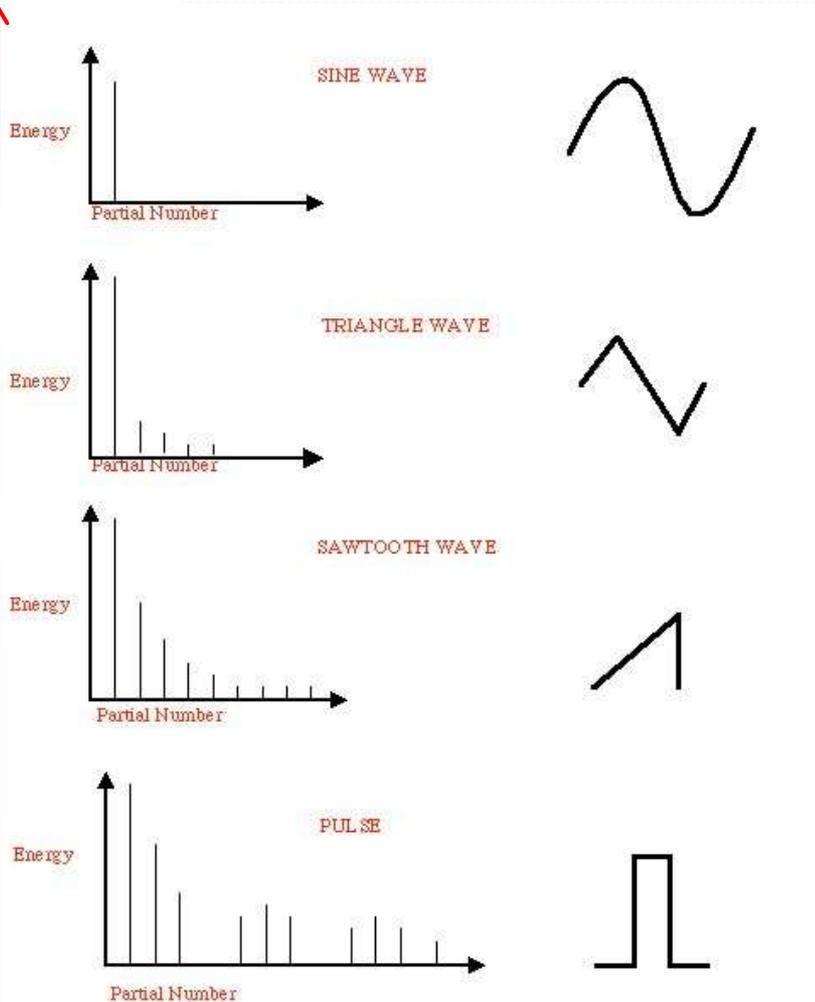
- Nessa série de imagens o que vemos é:
  - À medida que aumentamos a frequência, o circuito passou de um bom filtro passa-baixa a um bom integrador.
- E isso foi feito com um programa que:
  - decompõe a onda quadrada da entrada numa série de Fourier
  - aplica a cada componente da onda quadrada o ganho e a fase
  - soma tudo e recompõe a onda na saída.
- Então podemos simular o que o circuito **RC** escolhido faz com um algoritmo, graças a Fourier

# Como Analisar as Freqüências de um Sinal

- **Análise de Fourier ou transformada de Fourier**
  - É um gráfico no qual o eixo-X representa a freqüência da componente de Fourier e o eixo-Y mostra a amplitude daquela componente
  - Deste modo pode-se ver claramente qual a contribuição de cada harmônica para o sinal final e podemos projetar os circuitos com o mínimo de interferência
  - Abre inúmeras possibilidades para tratamento de sinais e imagens.
- **Métodos numéricos de obtenção para sinais discretos**
  - FFT " Fast Fourier Transform

# Como encontrar a série de Fourier para um sinal?

Amp (V)



Um seno puro só tem uma frequência, então sua transformada é uma função delta de Dirac!

**Transformada direta:**

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

**Transformada inversa:**

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

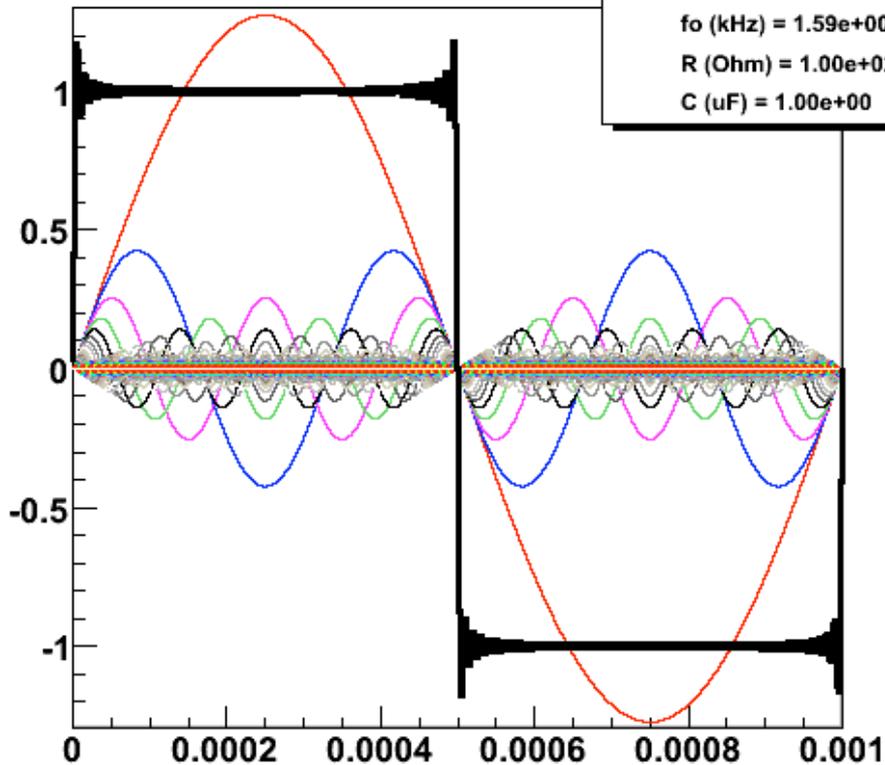
# Exemplo: Onda Quadrada

Sinal

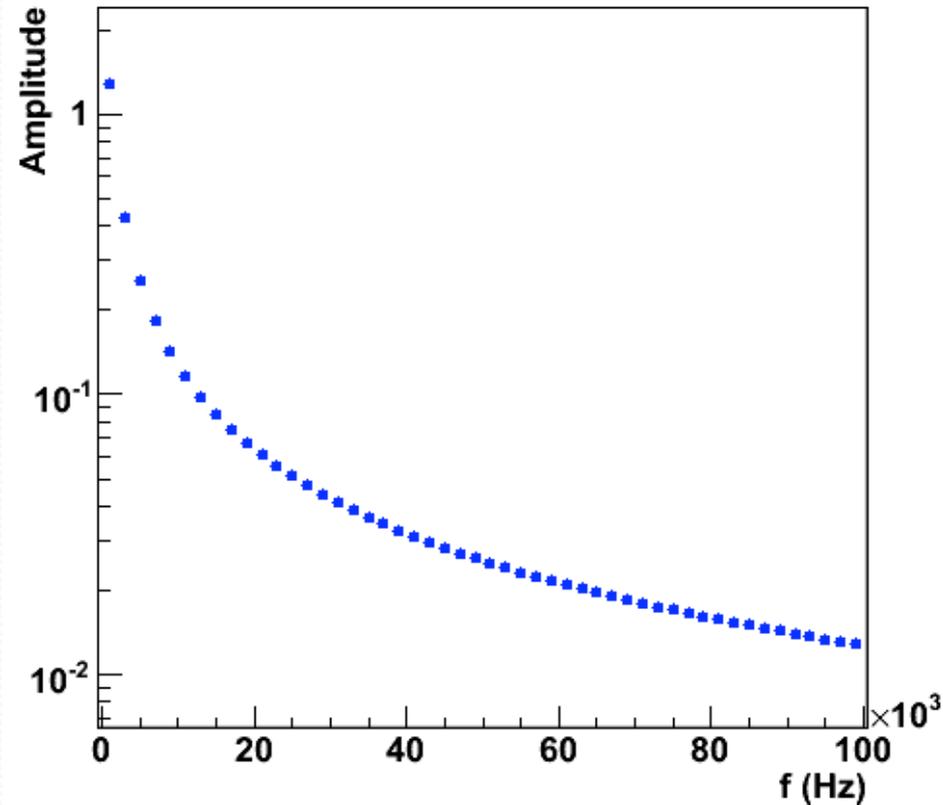
Transformada de Fourier  
Espectro de amplitude

Onda quadrada N = 100

— Sinal somado  
f (kHz) = 1.00e+00  
fo (kHz) = 1.59e+00  
R (Ohm) = 1.00e+02  
C (uF) = 1.00e+00



FFT Onda quadrada



# Objetivos da Semana

- Observar as transformadas de Fourier na entrada e na saída do circuito integrador
  - Isso significa utilizar uma frequência para a qual você sabe que o circuito está funcionando como um bom integrador
  - Comparar o resultado com a previsão teórica
- E projetar dois filtros
  - Um passa-alta
  - e outro passa-baixa
  - E verificar que eles se comportam como esperado

# Circuito Integrador

$$\frac{dV_s}{dt} = \frac{V_e}{RC}$$

equação 5

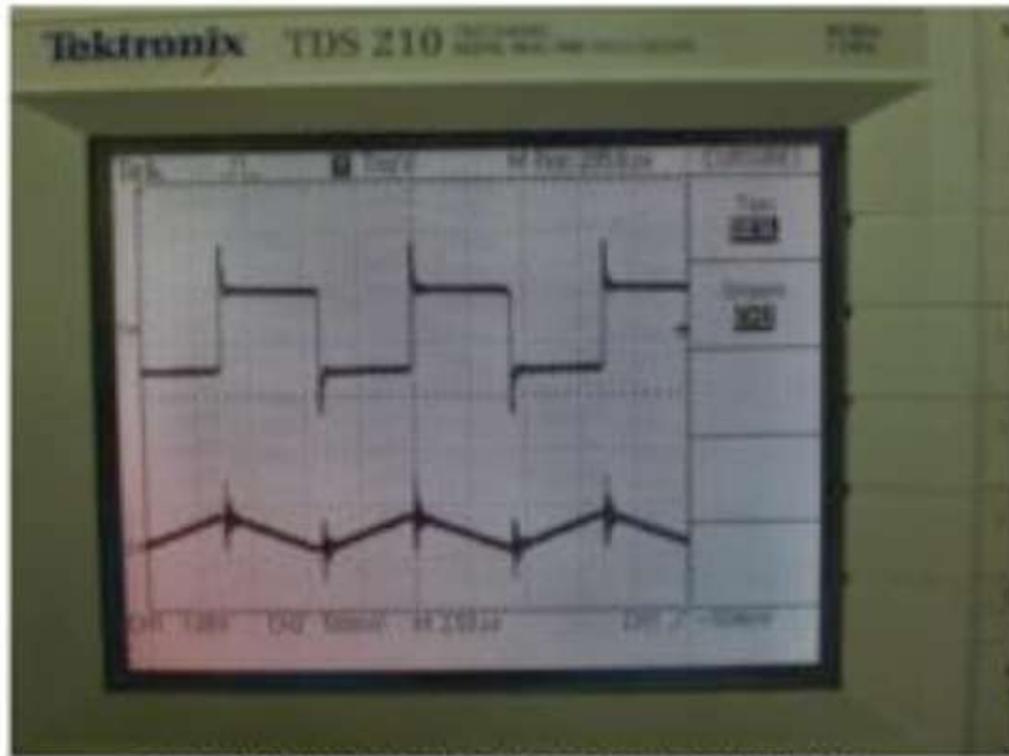


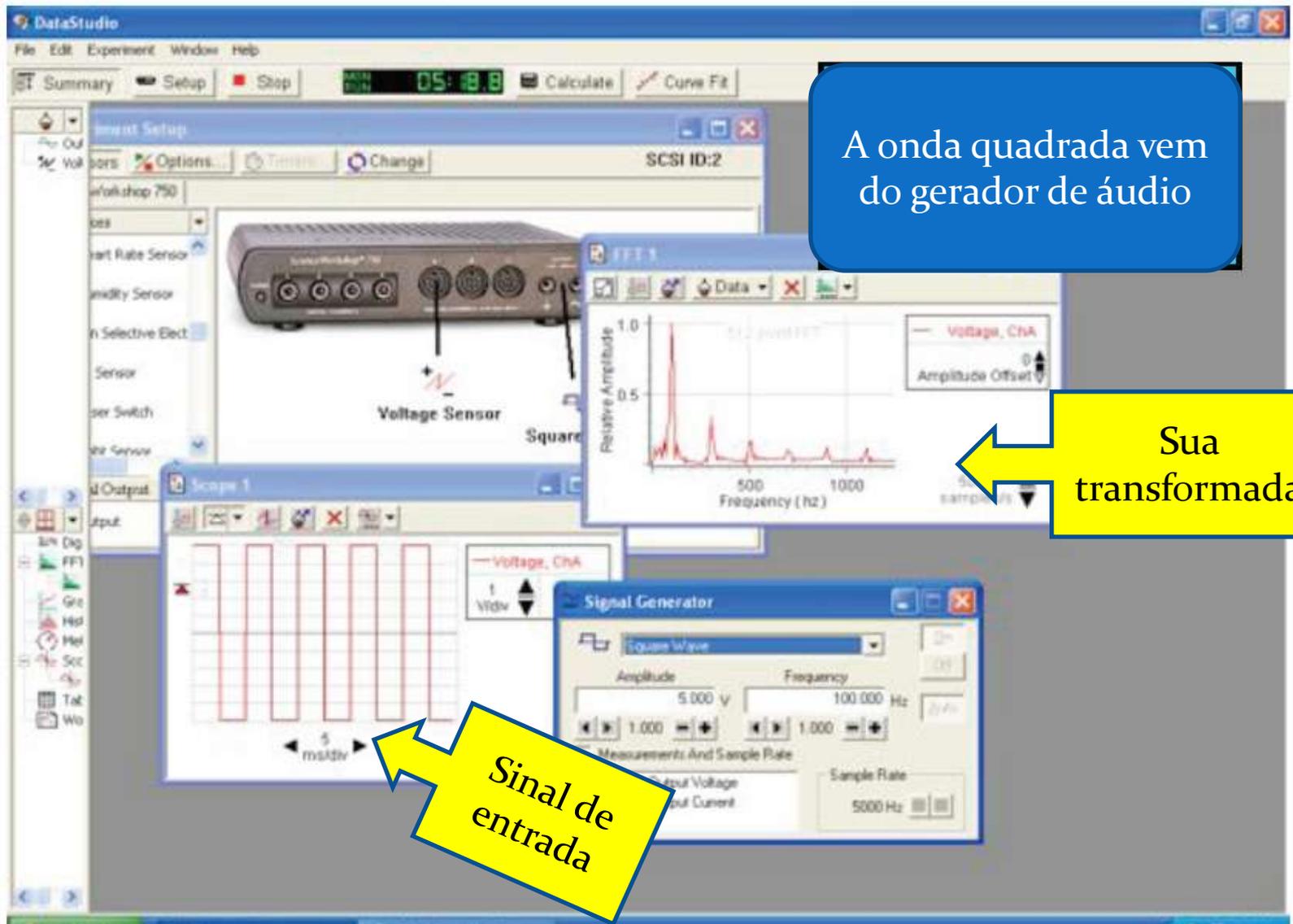
Figura2: foto da tela do osciloscópio utilizando ondas quadradas.

Onde  $V_s$  é a tensão de saída,  $R$  é a resistência, que é  $10\Omega$ ,  $C$  é a capacitância, que é  $1\mu\text{F}$  e  $V_e$  é a tensão de entrada. O valor da derivada da tensão de entrada é  $(9,1\pm 0,1)\times 10^4\text{V/s}$  e o valor de  $V_e/(RC) = (10,4\pm 0,5)\times 10^4\text{V}/(\Omega\text{F})$ . O valor da tensão de entrada é o valor de tensão do canal 1 menos o valor de tensão do canal 2

# Circuito Integrador

- Montar o filtro **RC** de  **$f_c=500\text{Hz}$** 
  - Alimentá-lo com uma onda quadrada de frequência  **$f \gg f_c$** , ou seja, de modo que a onda na saída seja a integral da onda na entrada
    - Anote as amplitudes (Volts) do sinal de entrada e saída, compare as duas e fotografe
- Para obter a transformada de Fourier das ondas na entrada e na saída, utilize o DataStudio com a função **FFT** (Fast Fourier Transform)
  - Obtenha as amplitudes e frequências que compõem esses sinais e compare quantitativamente com a previsão teórica
    - Faça o gráfico de **amplitude X frequência** para a onda da entrada e da saída

# Circuito Integrador

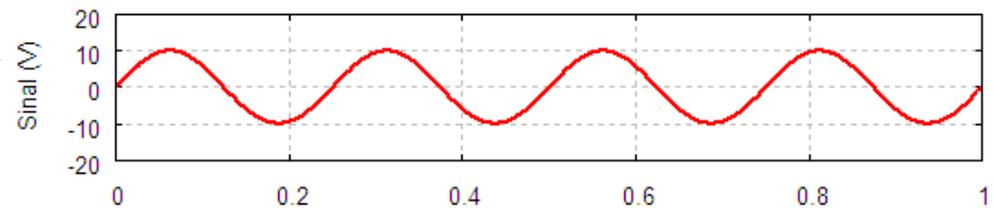
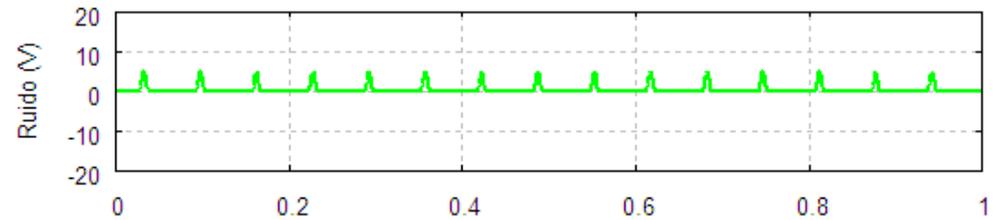
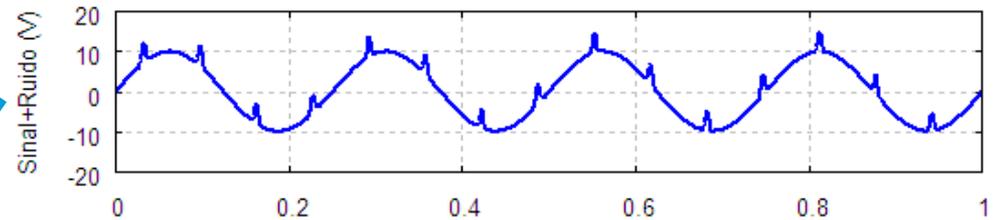


# Filtros

- A proposta é projetar um filtro passa-alta e outro passa-baixa.
- Para testá-los dispomos de um circuito que está dentro de uma caixinha de plástico e que gera um sinal entre  $\sim 200$  e  $\sim 1800\text{Hz}$ 
  - O circuito da caixinha permite somar qualquer outro sinal vindo de um gerador de áudio ao sinal que ele gera, tem uma entrada para sinal externo na caixa.
  - A saída do circuito da caixinha é a soma do sinal que ele gera e do sinal externo.

**Importante:** o circuito da caixinha não funciona se o potenciômetro que regula a frequência está encostado no início ou no fim de curso.

# Gerador de ruído



time (ms)

# Também para esta semana

- Alimente o circuito da caixinha com uma tensão **DC** de **9,0V**
- Observe o sinal de saída no osciloscópio, qual a frequência desse sinal? Fotografe.
- Em seguida, na entrada para sinal externo, coloque uma onda senoidal de **60Hz**.
- Observe a saída. O que você observa? Fotografe.
- Agora projete dois filtros diferentes:
  - Um **passa-baixa**, que deixe passar sem atenuação o sinal de **60Hz**, mas não deixe passar o sinal de alta frequência
  - E um **passa-alta** que deixe passar o sinal gerado pelo circuito da caixinha e não deixe passar o sinal de 60Hz

# Para esta semana

- O que precisa entregar:
  - Como são construídos os filtros
  - Os valores de **R** e **C** em cada caso e a justificativa
  - Fotos do sinal de entrada e saída em cada caso.
- Comente o desempenho dos filtros:
  - Houve atenuação do sinal de interesse? Qual o **ganho**, em cada caso?
  - E quanto ao sinal que se quer descartar? Meça os ganhos.
- Tudo isso para os dois filtros, passa-baixa e -alto

# Lembrem-se

- Para afirmar que duas grandezas são compatíveis é preciso calcular o t-score
- Uma medida física não tem significado se não vier acompanhada da incerteza
- Um gráfico com pontos experimentais SEMPRE deve conter:
  - As incertezas nas duas direções
- Sempre que pertinente, o gráfico também deve conter:
  - Curva teórica
  - Curva ajustada
- Sempre compare os ajustes com a teoria e DISCUTA

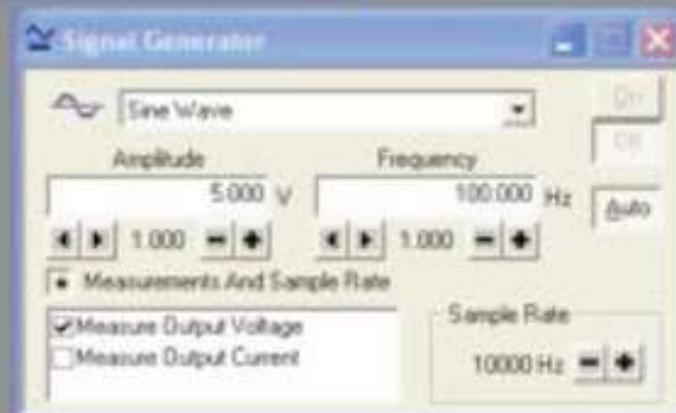
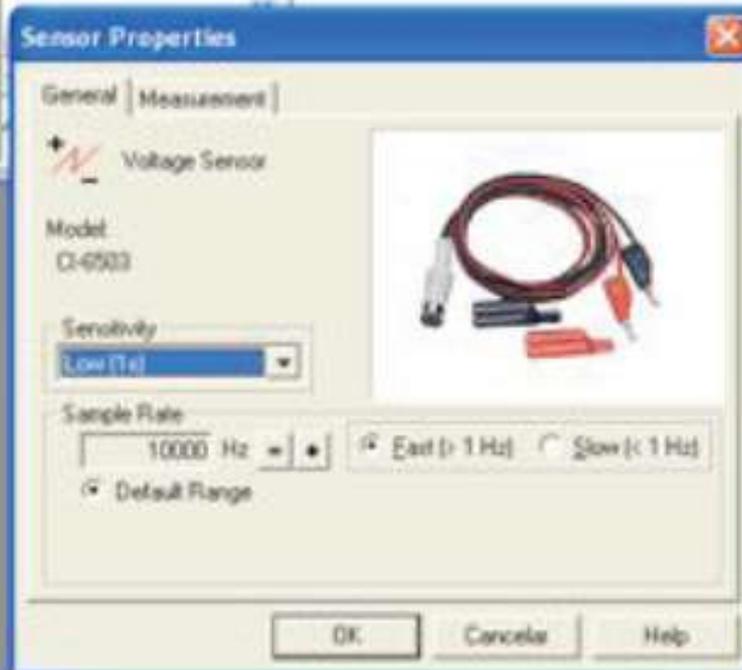
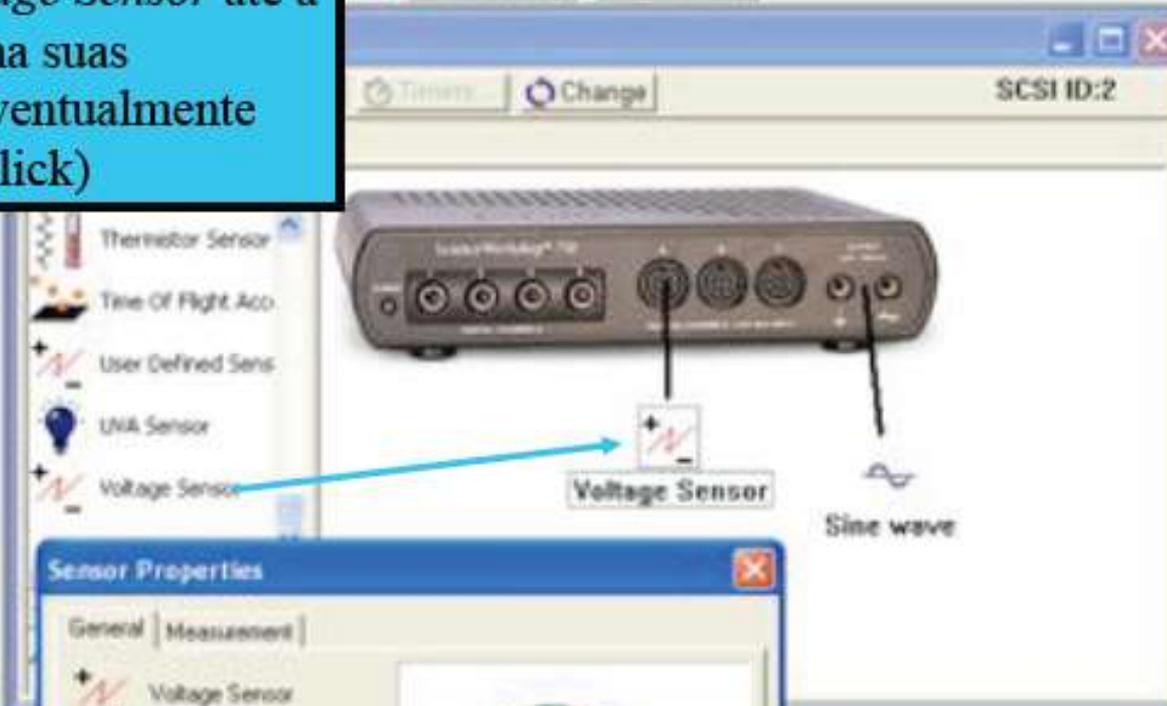
Ligue seu osciloscópio para controlar se a saída do 750 é de fato o que foi selecionado via software.

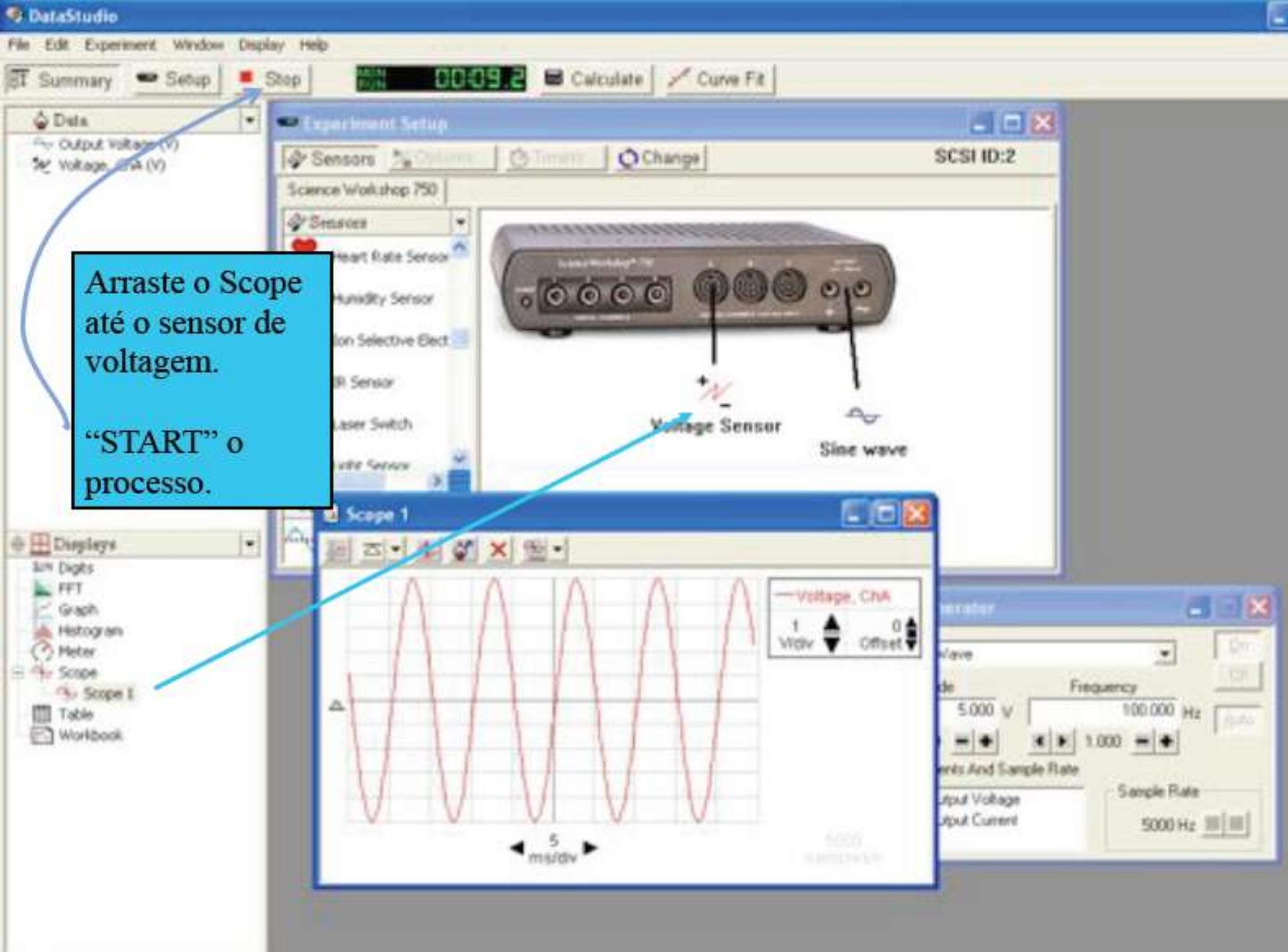
1) Ligue a interface PASCO 750 na tomada. Veja o LED power on.

2) Conecte um adaptador para pino banana na **entrada A, B ou C**.

A fonte do DataStudio não pode ser usada em razão da diferença de impedância

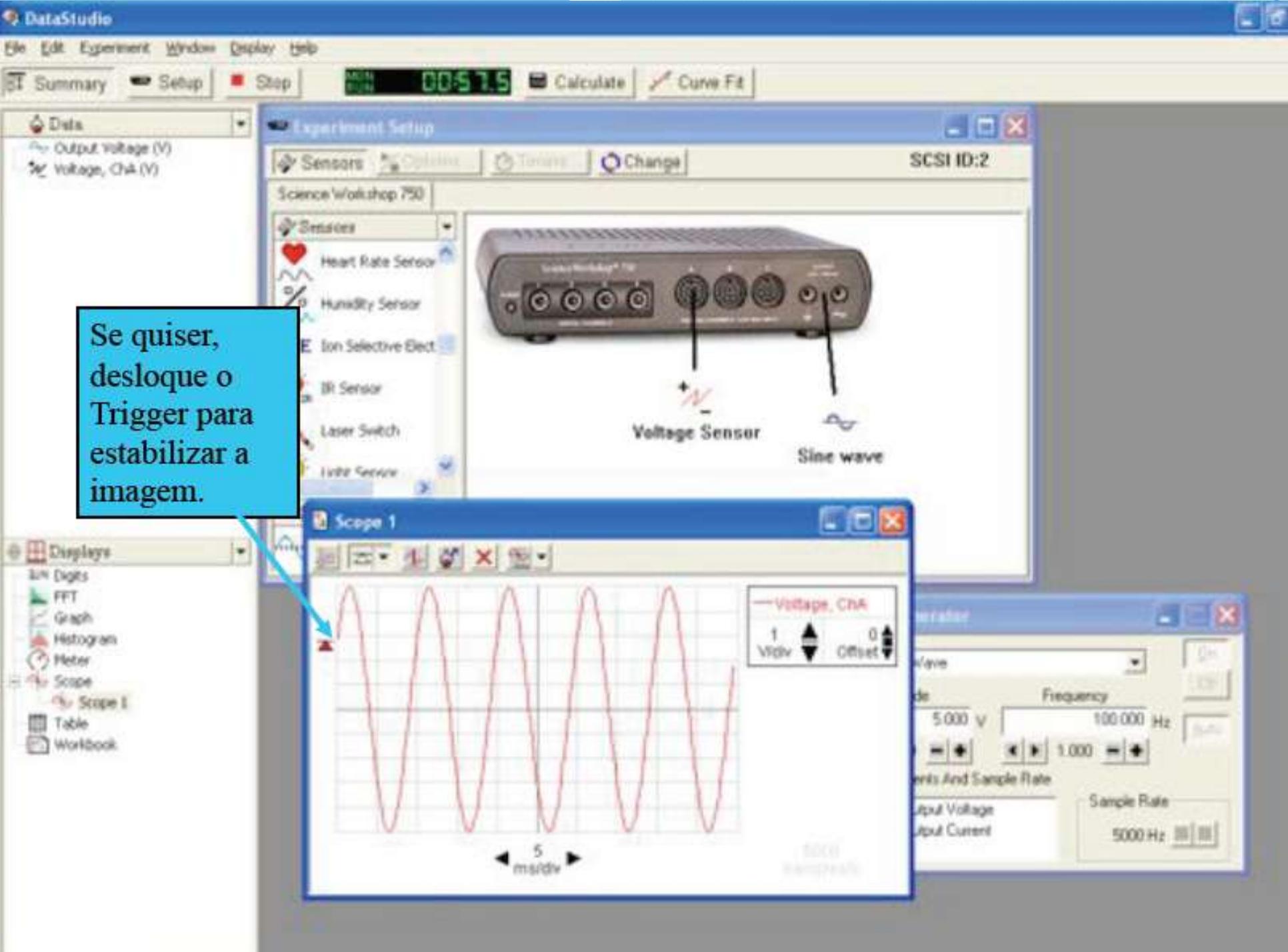
Arraste um *Voltage Sensor* até a entrada A. Defina suas propriedades (eventualmente com um duplo click)



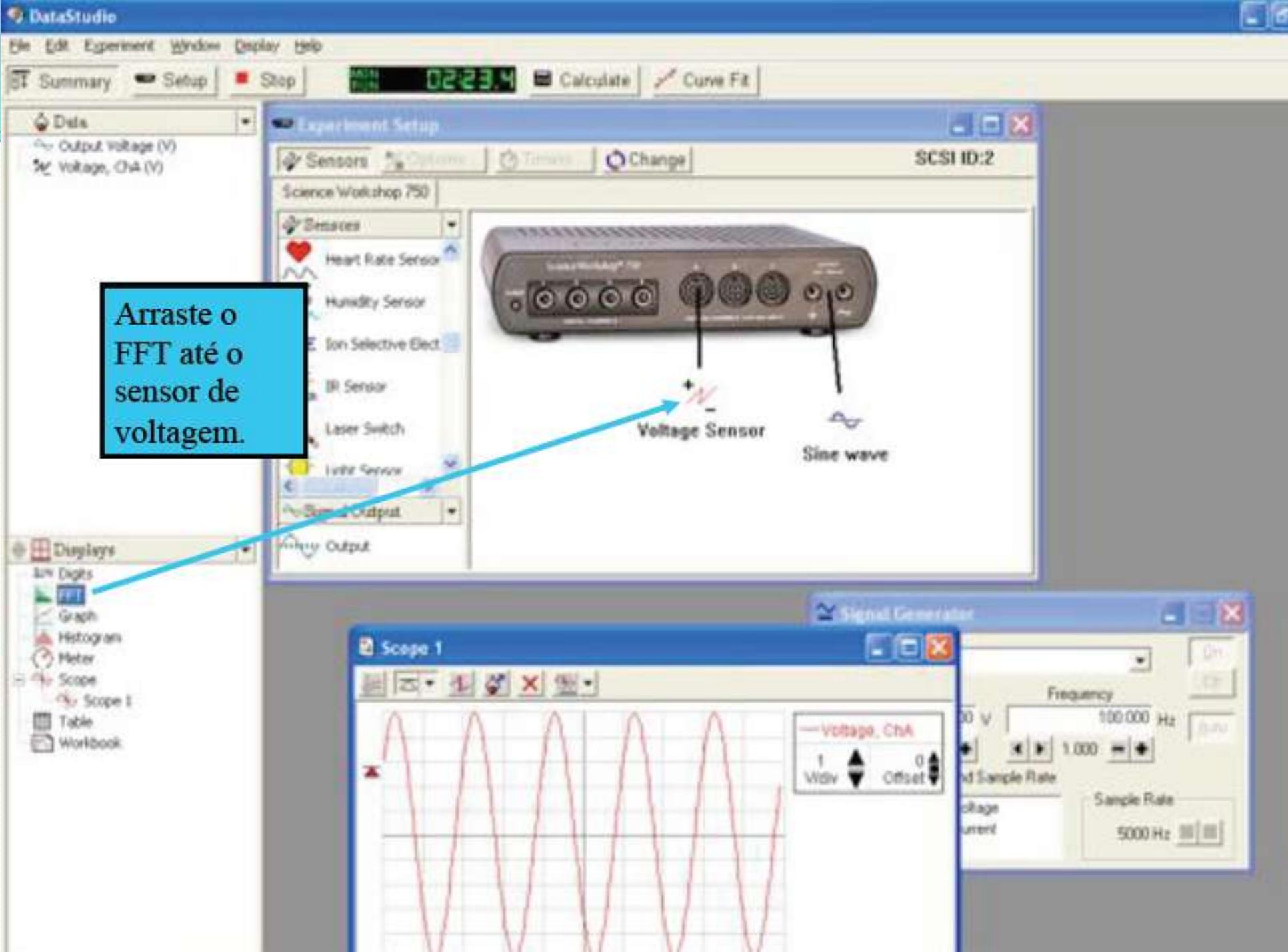


Arraste o Scope até o sensor de voltagem.

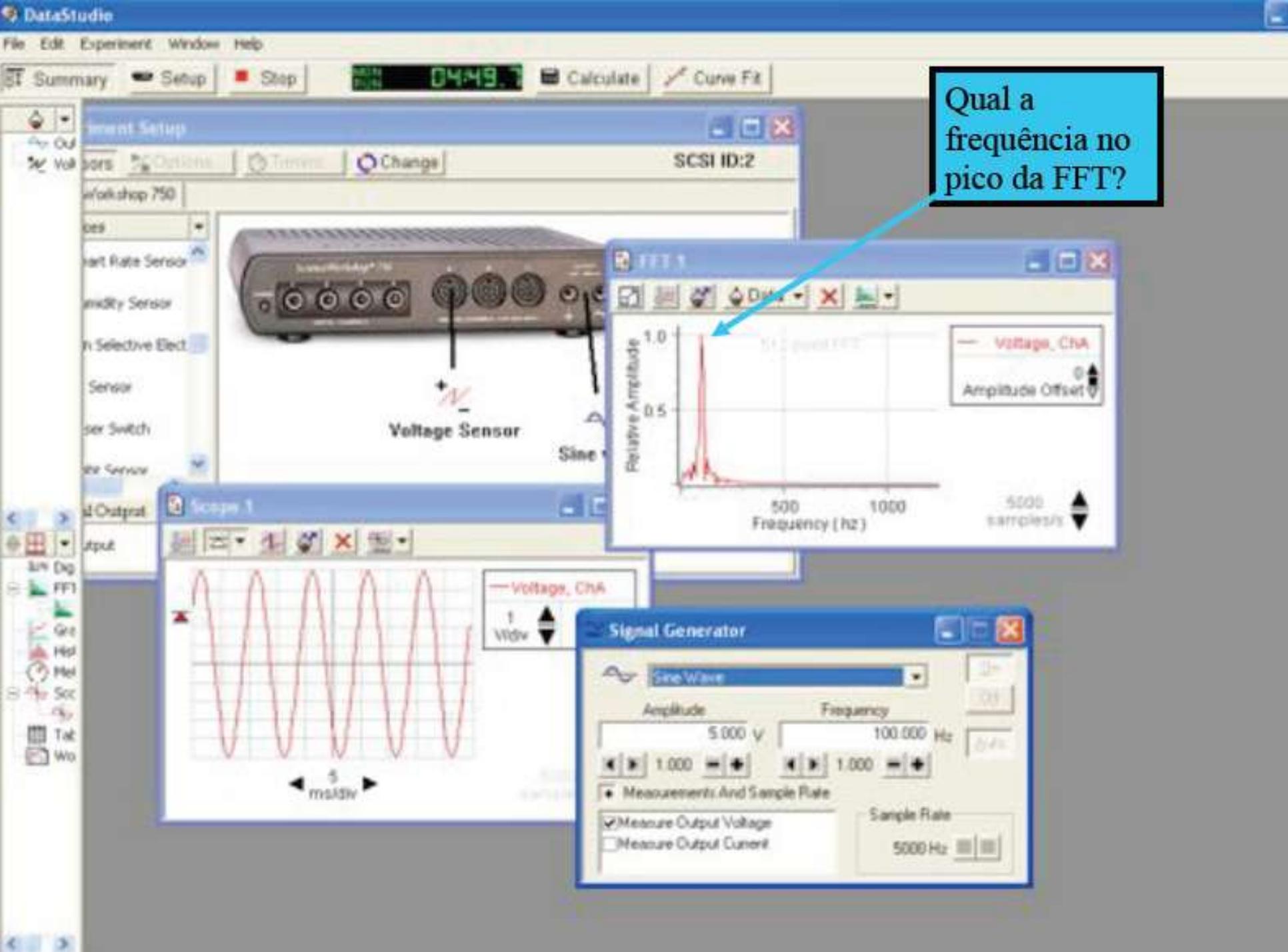
“START” o processo.



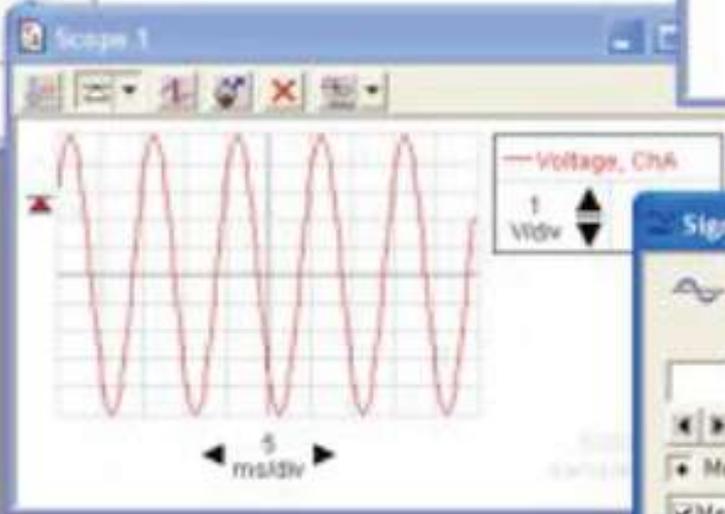
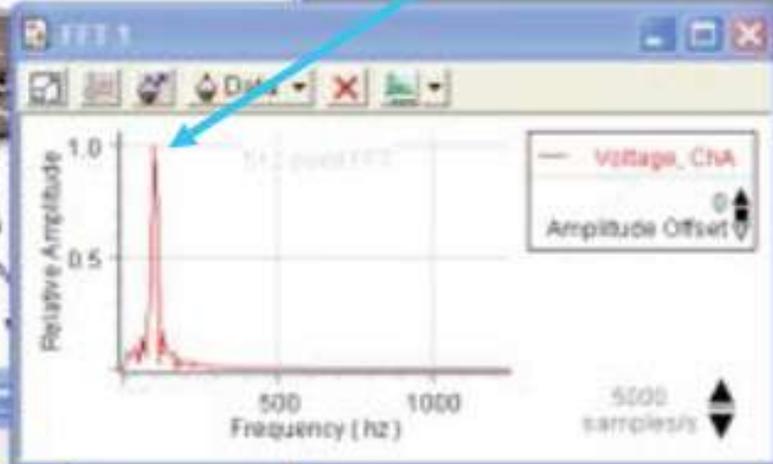
Se quiser, desloque o Trigger para estabilizar a imagem.



Arraste o  
FFT até o  
sensor de  
voltagem.



Qual a frequência no pico da FFT?



**Signal Generator**

Sine Wave

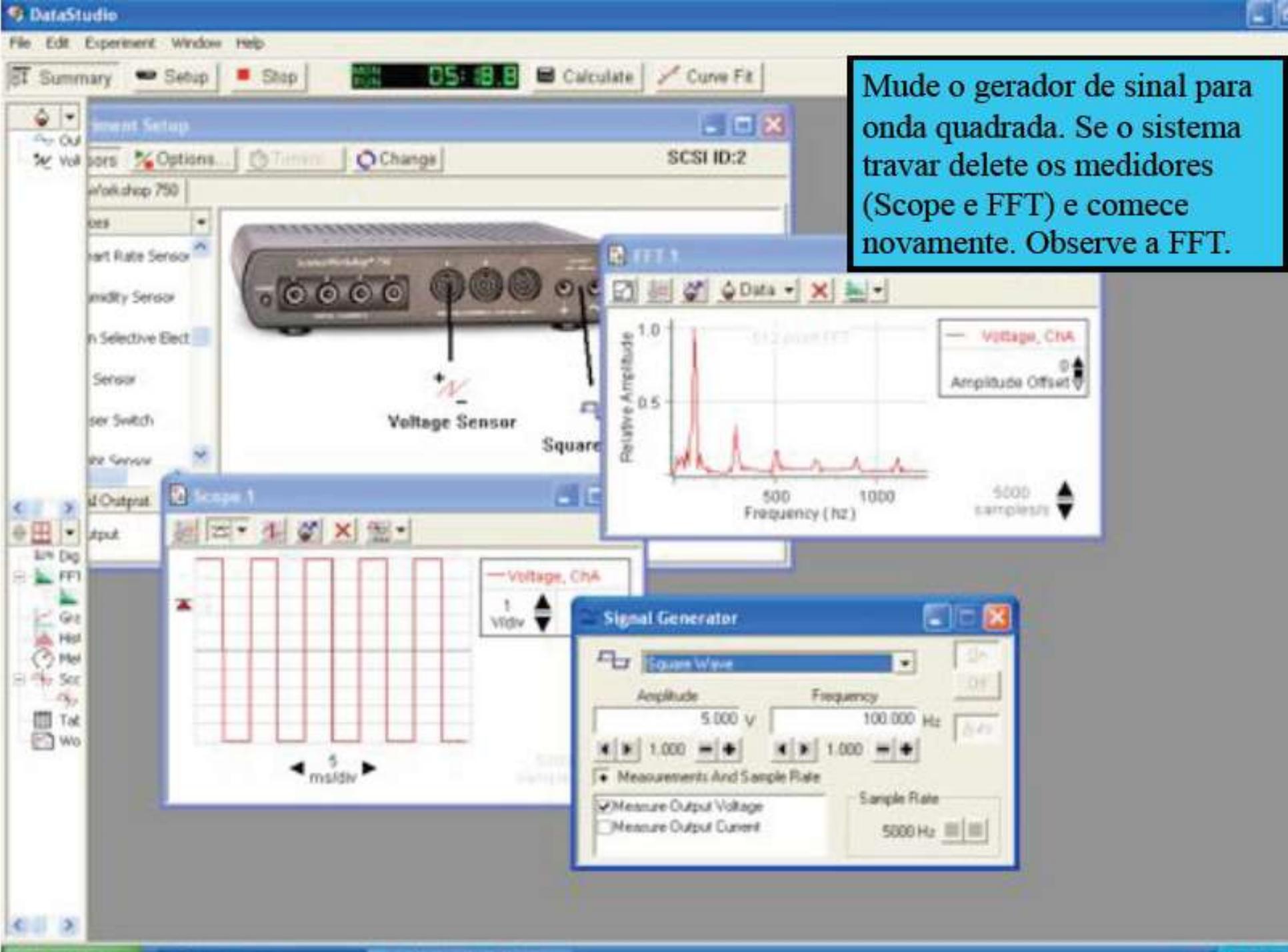
Amplitude: 5.000 V      Frequency: 100.000 Hz

Measurements And Sample Rate

Measure Output Voltage

Measure Output Current

Sample Rate: 5000 Hz



Mude o gerador de sinal para onda quadrada. Se o sistema travar delete os medidores (Scope e FFT) e comece novamente. Observe a FFT.

