

Física Experimental IV

Notas de aula: www.fap.if.usp.br/~hbarbosa

LabFlex: www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex

Aula 1, Experiência 1 Circuitos CA e Caos

Prof. Henrique Barbosa

hbarbosa@if.usp.br

Ramal: 6647

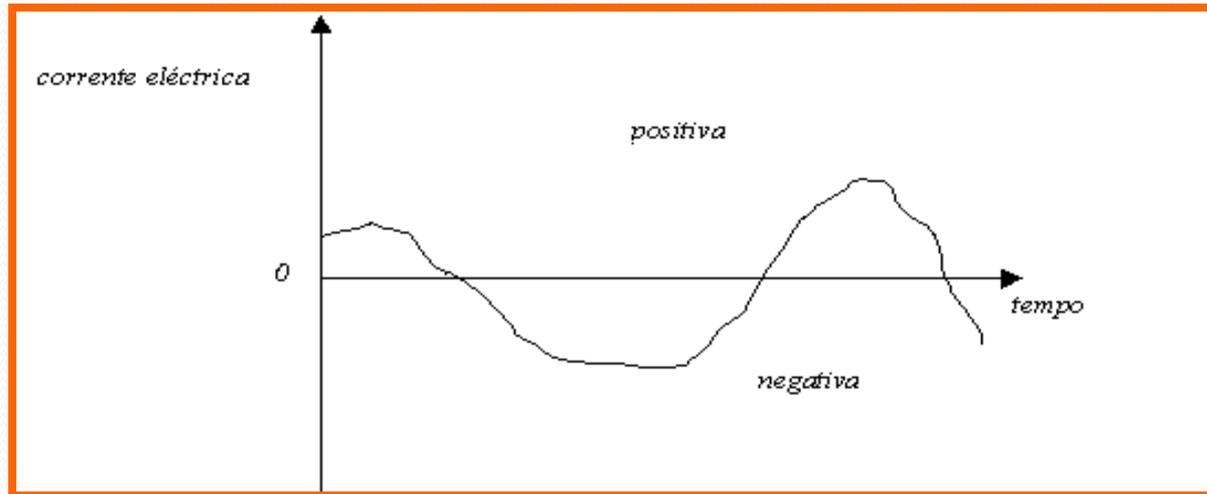
Ed. Basílio Jafet, sala 100

Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados
- 5 aulas
 - Noções de CA, filtro RC e circuito integrador
 - Análise de Fourier unidimensional
 - Ressonância de um circuito RLC simples
 - Funções caóticas: mapa logístico
 - Caos em circuito RLD

Tensões e Correntes Alternadas

- Tensão alternada: qualquer tensão que varia no tempo



- Na prática trabalhamos com tensões harmônicas simples
 - Veremos no lab4 que qualquer tensão dependente do tempo é uma superposição de tensões harmônicas simples

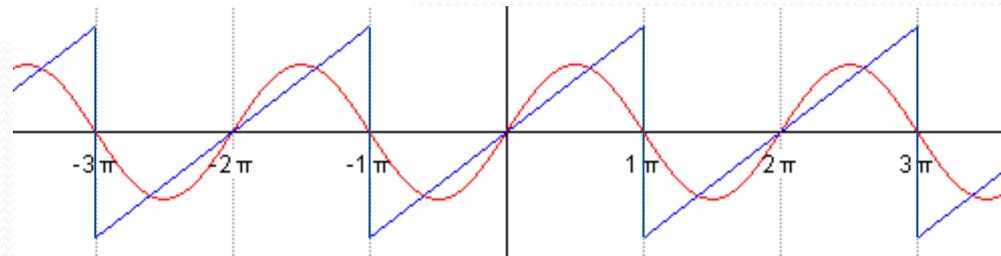


(1768–1830)

Série de Fourier

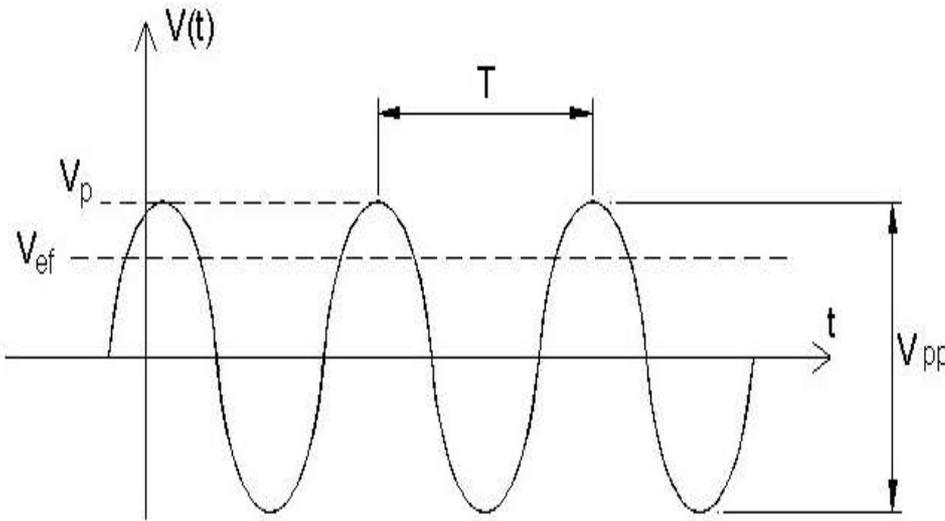
- Uma série de Fourier decompõe uma função periódica em uma simples soma de senos e cossenos (ou exponenciais complexas).
- Joseph Fourier introduziu estas séries infinitas para resolver a equação de transferência de calor em uma placa de metal.
- Não havia solução geral, apenas particulares para fonte de calor senoidal. A idéia de Fourier foi modelar uma fonte de calor complicada como uma superposição (ou combinação

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$



Tensões Harmônicas Simples

- Aquelas descritas por uma função harmônica simples de frequência bem definida, ou seja:



$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$V_{PP} = 2V_P$$

$$V_{ef} = \frac{V_P}{\sqrt{2}}$$

V_P é a tensão máxima ou **tensão de pico** ou amplitude, ω é a **frequência angular** e ϕ_0 é a **fase da tensão alternada no instante $t=0$**

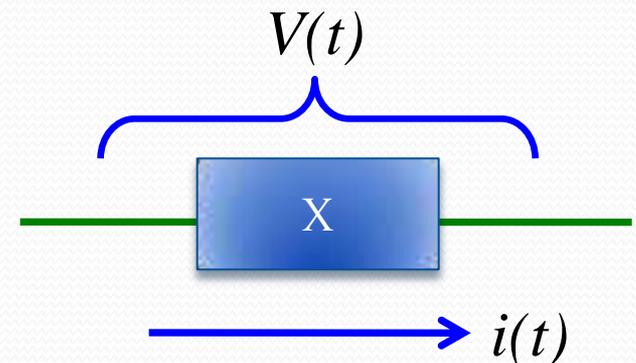
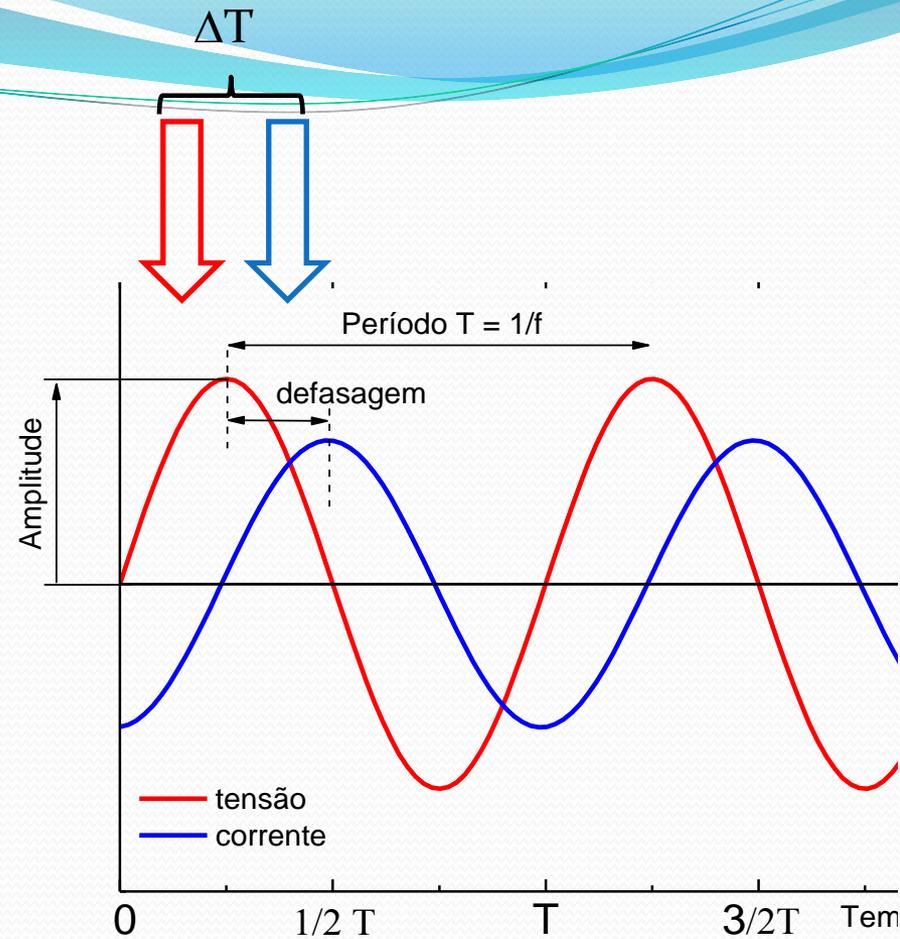
A fase

- Em um circuito de corrente alternada a tensão e corrente não estão necessariamente em fase:

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t)$$

$$V(t) = V_P \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$\phi = 2\pi \frac{\Delta T}{T} = \omega \cdot \Delta T$$



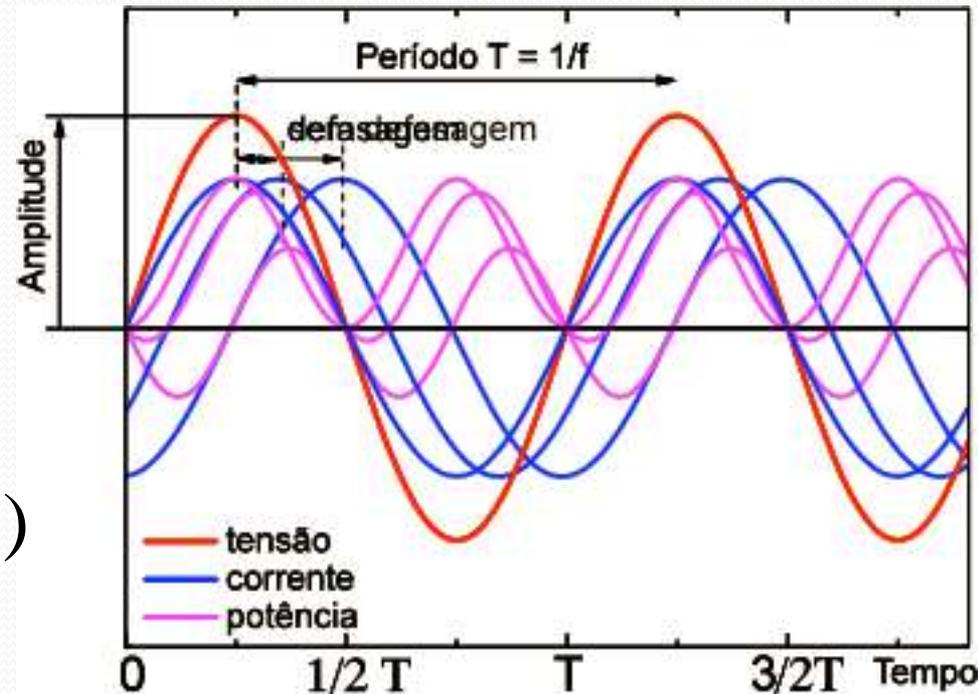
Potência Instantânea

- Instantaneamente:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P(t) = V_P i_0$$

$$\sin(\omega t + \phi) \sin(\omega t)$$



- Depende da fase entre corrente e tensão e pode ser negativa!

Potência positiva é aquela consumida

Potência negativa é aquela fornecida

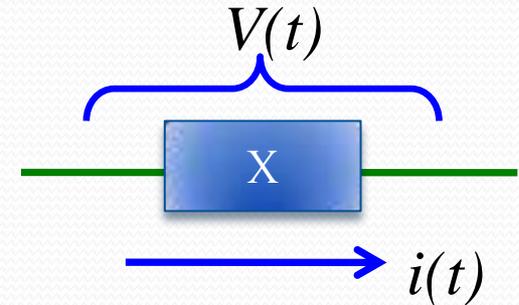
Exemplo 1: Resistor Ôhmico

Em um resistor ôhmico simples, a relação entre tensão e corrente é:

$$R = \frac{V_P}{i_P} = cte$$

$$i(t) = i_P \cos(\omega t)$$

$$V(t) = R \cdot i(t) = Ri_P \cos(\omega t)$$

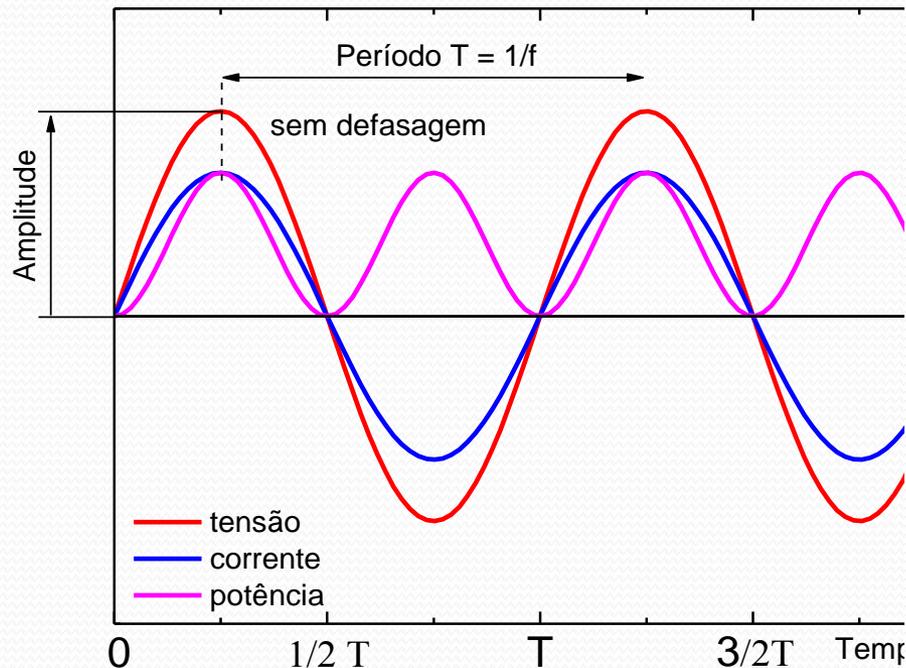


A fase entre tensão e corrente é nula

Exemplo 1: Resistor Ôhmico

- A potência instantânea é:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) = R \cdot i_0^2 \cdot \cos^2(\omega t) > 0, \text{ sempre}$$



- A potência varia no tempo, mas é sempre positiva o que significa que **o resistor sempre consome potência**

Exemplo 2: Capacitor Ideal

Em um capacitor ideal, a capacitância é dada pela razão entre carga acumulada e tensão elétrica, ou seja:

$$C = \frac{q(t)}{V(t)} \Rightarrow V(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Além disso, carga e corrente estão relacionados

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$$

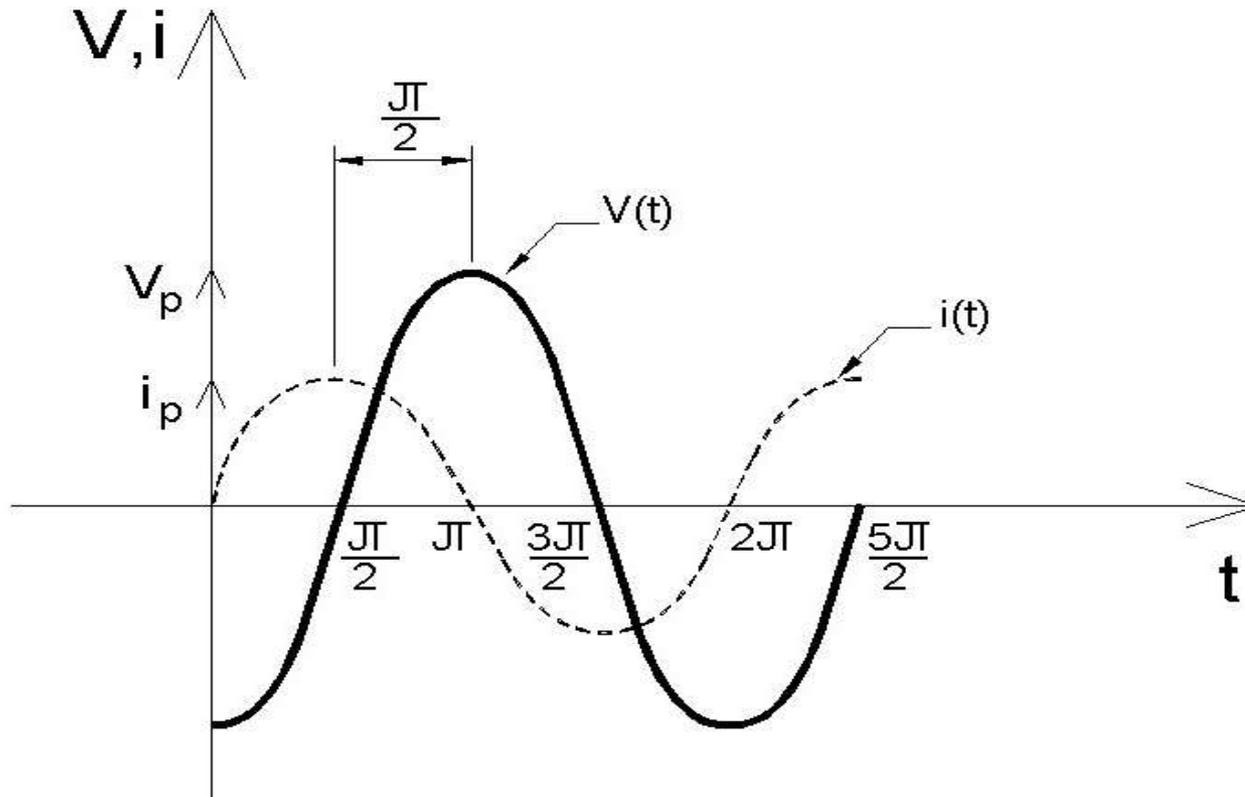
A fase não é nula!

Portanto:

$$V(t) = V_p \cos(\omega t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$i(t) = -\omega C V_p \sin(\omega t) = \omega C V_p \cos(\omega t - \pi / 2)$$

Exemplo 2: Capacitor Ideal



a corrente está adiantada de $\pi/2$ em relação à tensão aplicada ao capacitor (**Atenção: a defasagem de $\pi/2$ é entre a corrente e a tensão diretamente sobre o capacitor e não quaisquer outras**).

Exemplo 2: Capacitor Ideal

- A potência em um capacitor pode ser escrita como:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P(t) = \frac{i_0^2}{\omega C} \cos(\omega t) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Em circuitos de corrente alternada, muitos elementos possuem fases não nulas entre corrente e tensão. Nestes casos, o formalismo trigonométrico torna-se bastante complexo e inconveniente.

Números Complexos

$$\hat{C} = a + b j \quad j = \sqrt{-1}$$

$$\hat{C} = C e^{j\alpha} \quad e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\frac{d}{dt} (e^{j\omega t}) = j\omega e^{j\omega t}$$

$$\int e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}$$

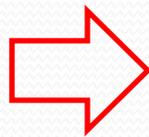
Integrais e derivadas nesta notação são apenas multiplicações e divisões

Formalismo Complexo

- Este formalismo é construído de tal forma a facilitar todos os cálculos que envolvem tensões alternadas
- Vamos definir as tensões e correntes complexas como sendo:

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)}$$

$$\hat{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)}$$



$$V(t) = \text{Re}(\hat{V}(t)) = V_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$i(t) = \text{Re}(\hat{i}(t)) = i_0 \cos(\omega t + \phi_1)$$

Impedância Complexa e Real

A impedância complexa de um elemento X é definida como sendo a razão entre a tensão e corrente complexas neste elemento, ou seja:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$

Usando a definição das tensões e correntes complexas, deduzimos que:

$$\hat{Z} = \frac{V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)}}{i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)}} = \frac{V_0}{i_0} e^{j(\phi_0 - \phi_1)} = Z_0 e^{j\phi}$$

Z_0 é a impedância REAL do elemento X

ϕ é a diferença de fase entre a tensão e corrente causada pelo elemento X

A impedância NÃO varia com o tempo. É uma grandeza característica do elemento X

Resistência e Reatância

- Da definição de impedância complexa:

$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi}$$

- Podemos escrever também que:

$$\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$$

- Define-se resistência (R) de um bipolo como sendo:

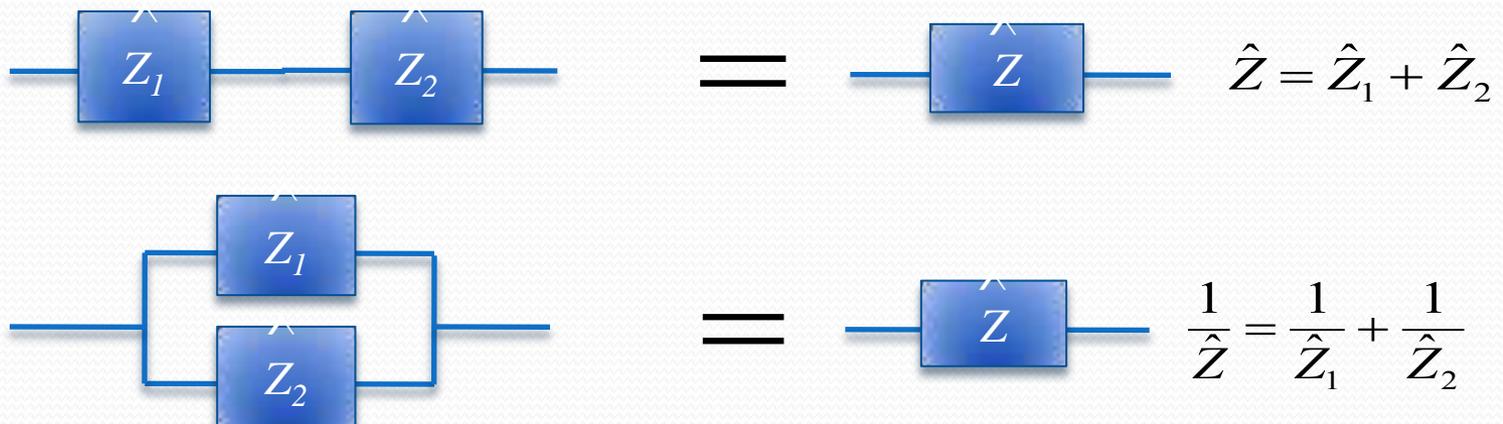
$$R = Z_0 \cos(\phi)$$

- E reatância deste bipolo (X)

$$X = Z_0 \sin(\phi)$$

Porque usar este formalismo?

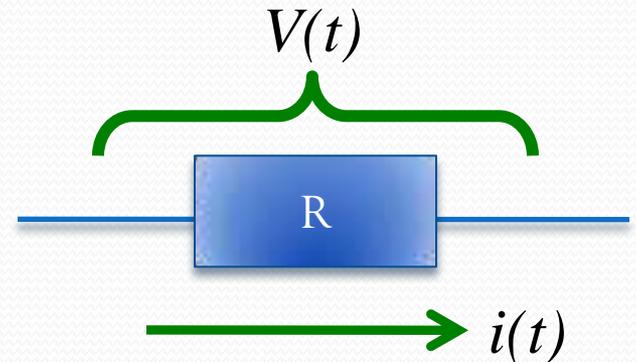
- As grandes vantagens deste formalismo são:
 - Operações envolvendo tensão e corrente são simples
 - Multiplicações e divisões de exponenciais
 - Associações de bipolos tornam-se simples
 - Como resistores comuns, mas realizadas com grandezas complexas



Aplicação para o Resistor

- Seja uma tensão e corrente complexas, temos:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$



- Mas sabemos que $R = V/i$, ou seja, a corrente e tensão estão sempre em fase. Assim:

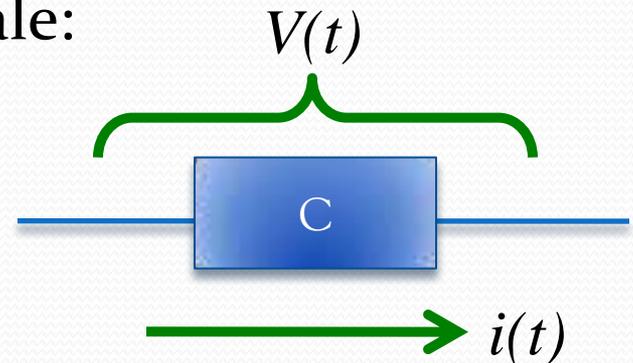
$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi} = R \Rightarrow \begin{cases} Z_0 = R \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Por conta disto que resistores Ôhmicos são muito utilizados em laboratório para medir correntes

Aplicação para o Capacitor

- Sabemos (do começo da aula) que $V(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$
- Se a corrente complexa for dada por: $\hat{i}(t) = i_0 e^{j\omega t}$
- Fica fácil demonstrar que $\hat{V}(t) = -\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}$
- A impedância de um capacitor vale:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{-\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j\omega t}} = -\frac{j}{\omega C}$$

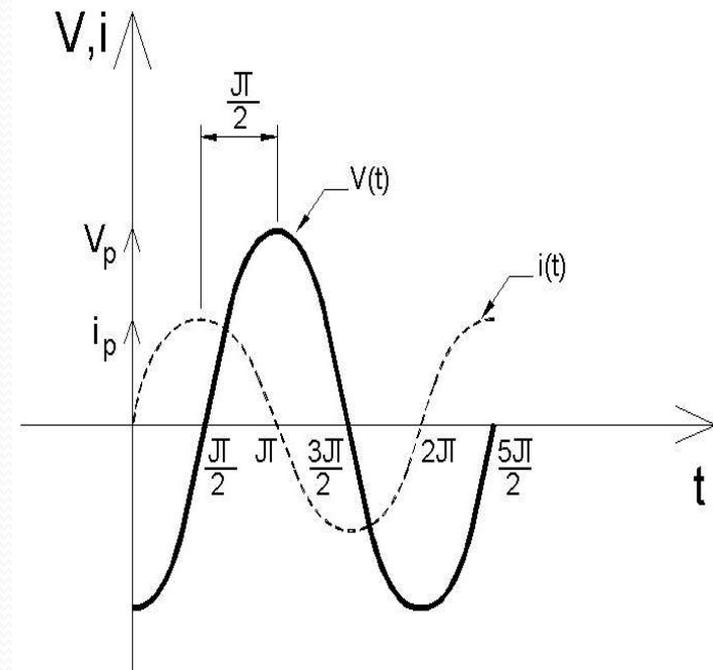


Aplicação para o Capacitor

- Ou seja $\hat{Z} = -\frac{j}{\omega C}$
- Mas lembrando que: $\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$
- Comparando as duas expressões temos que:

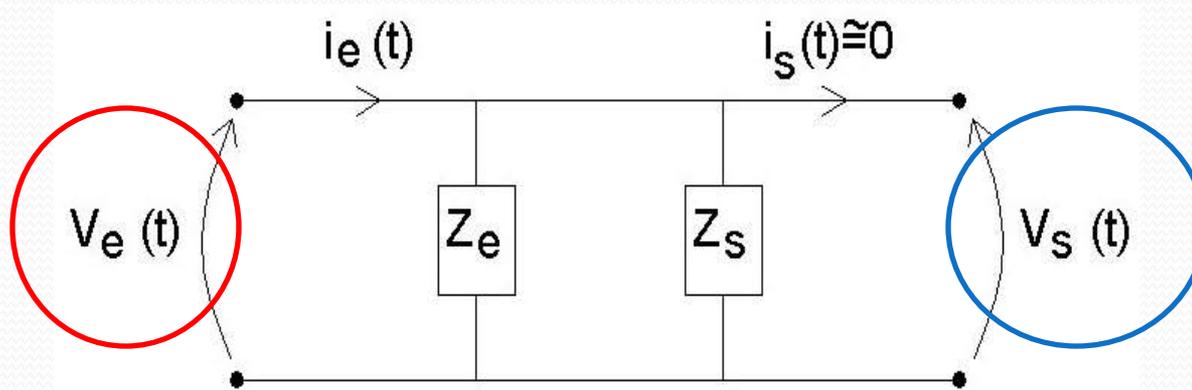
$$Z_0 = \frac{1}{\omega C} \quad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

Conclui-se naturalmente que a tensão elétrica está defasada de $\pi/2$ em relação à corrente



Esta Aula: Filtros e Circuitos Especiais

- Seja um quadripolo qualquer:



- Sinal de entrada = V_e
- Sinal de saída = V_s
- Como um se relaciona ao outro?

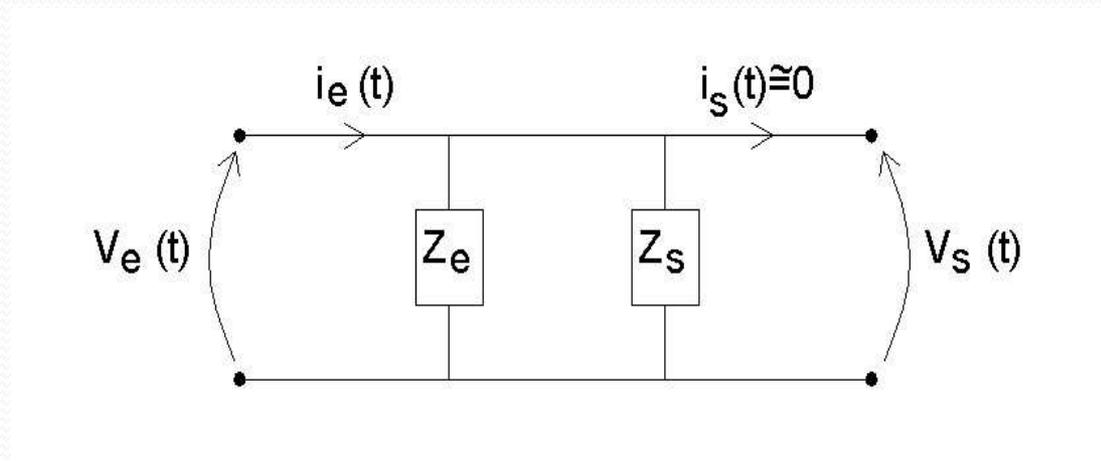
Esta Aula: Filtros e Circuitos Especiais

- Impedância de entrada, saída e ganho

$$\hat{Z}_e = \frac{\hat{V}_e}{\hat{i}_e}$$

$$\hat{Z}_s = \frac{\hat{V}_s}{\hat{i}_s}$$

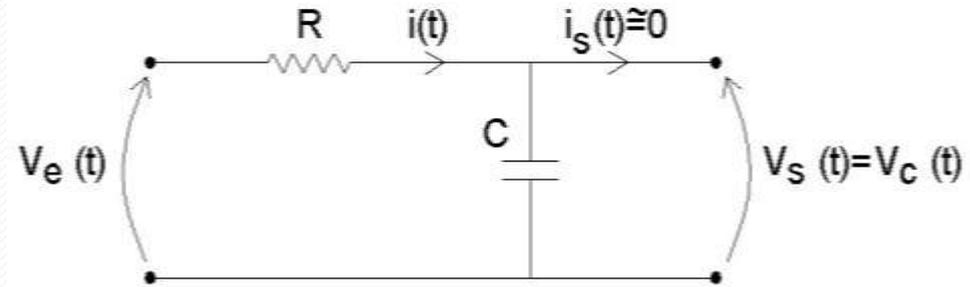
$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_e}$$



vamos ver como, com uma única tomada de dados, podemos explorar vários aspectos diferentes deste circuito.

Filtro RC

- Seja o filtro RC ao lado:



- Supondo que a corrente de saída seja praticamente nula ($i_s \sim 0$)

$$\hat{Z}_C = \frac{\hat{V}_C}{\hat{i}_C} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{i}} \Rightarrow \hat{V}_S = \hat{Z}_C \cdot \hat{i}$$

- Da mesma forma, podemos obter que:

$$\hat{V}_e = \hat{Z}_{total} \cdot \hat{i} = (\hat{Z}_R + \hat{Z}_C) \cdot \hat{i}$$

- E o “ganho” no circuito é dado por:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = \frac{\hat{Z}_C \cdot \hat{i}}{(\hat{Z}_R + \hat{Z}_C) \cdot \hat{i}} = \frac{\hat{Z}_C}{(\hat{Z}_R + \hat{Z}_C)} = \frac{-\frac{j}{\omega C}}{(R - \frac{j}{\omega C})}$$

Filtro RC – O Ganho

Como calcular o ganho, com esta expressão?

$$\hat{G} = \frac{-\frac{j}{\omega C}}{\left(R - \frac{j}{\omega C}\right)}$$

Dividindo por $-j/\omega C$: $\hat{G} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$

Definimos a frequência de corte (ω_c) como sendo:

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

O ganho fica: $\hat{G} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$

Filtro RC – O Ganho

- Usando a notação complexa:

$$\hat{G} = G_0 e^{j\phi_G}$$

O ganho real e a defasagem ficam:

$$\phi_G = \arctan\left(\frac{\text{Im}[\hat{G}]}{\text{Re}[\hat{G}]}\right)$$

$$G_0 = \sqrt{\hat{G}^* \hat{G}}$$

Para obter G^* ,
simplesmente troque
todos os (j) por $(-j)$

Fazendo a conta:

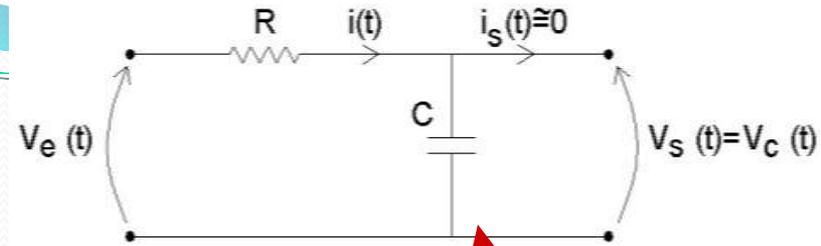
$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}} \quad \phi_G = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_C}\right)$$

O que estamos filtrando?

$$G_0 = \sqrt{\hat{G}\hat{G}^*} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

- Portanto, o ganho real do filtro **RC**, depende da frequência da tensão alternada a que ele está submetido.
- No caso em que essa **frequência é baixa**: $\omega \ll \omega_c$, o termo (ω^2/ω_c^2) fica **muito pequeno** se **comparado à unidade** e o **ganho é praticamente igual a 1**, i.e., **tensão de saída é praticamente igual à tensão de entrada**.
- No caso em que $\omega \gg \omega_c$, o termo (ω^2/ω_c^2) fica muito grande e o **ganho vai a zero**, i.e., **para frequências altas a tensão de saída é muito menor que a tensão de entrada**.

Resumo do Filtro



O circuito

O Ganho é: $\hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_e} = G_0 e^{j\phi_G}$

Sendo:

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

R e C podem ser medidos e há valores nominais

$$G_0 = \frac{V_s^0}{V_e^0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \quad \phi_G = \omega \cdot \Delta T_{s-e} = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Tensões são medidas com osciloscópio

A frequência também

Intervalo de tempo entre duas tensões também é mensurável

Circuito Integrador

Sabemos que:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = G_0 e^{j\phi_G}$$

Com:

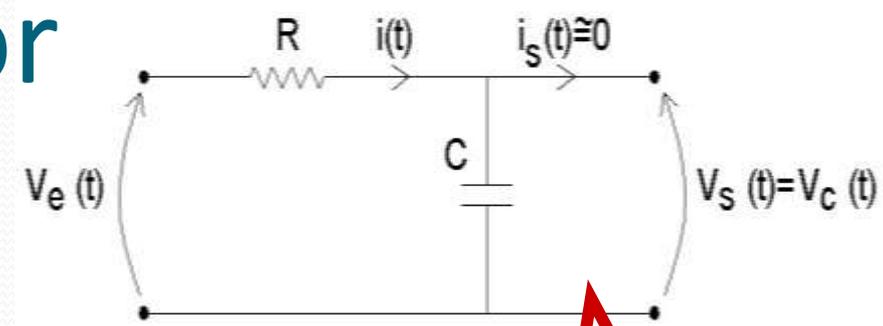
$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \quad \phi_G = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Se $\omega \gg \omega_c$, então:

$$G_0 \approx \frac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_c)^2}} = \frac{\omega_c}{\omega} \quad \phi_G = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Ou seja:

$$\hat{G} = \frac{1}{\omega RC} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j\omega RC}$$



Circuito especial

Circuito Integrador

- Então:

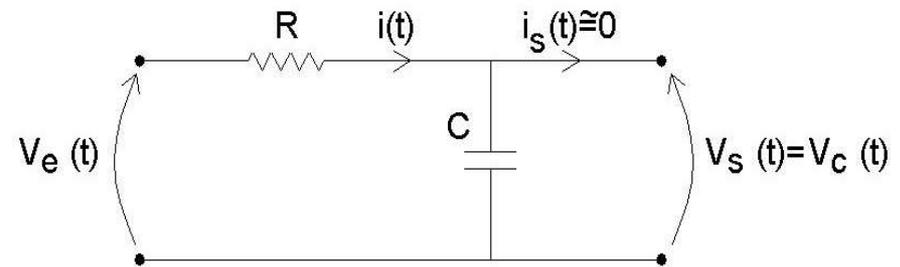
$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_e} = \frac{1}{j\omega RC}$$

- Ou ainda:

$$\hat{V}_s = \frac{1}{j\omega RC} \hat{V}_e$$

- Temos que:

$$\hat{V}_s = \frac{1}{RC} \int \hat{V}_e dt$$



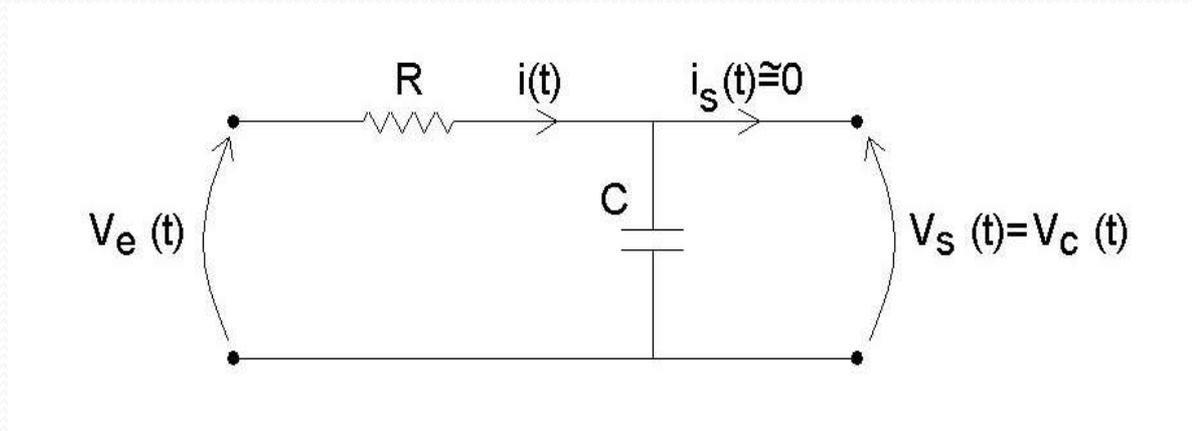
- Lembrando que: $\hat{V}_e = V_e e^{j\omega t}$

- E que: $\int \hat{V}_e dt = \frac{1}{j\omega} V_e e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega} \hat{V}_e$

No limite que $\omega \gg \omega_c$, $G_o \rightarrow 0$ e o circuito acima funciona como integrador da tensão de entrada

Para esta aula

- Vamos estudar o filtro **RC**:



Objetivos:

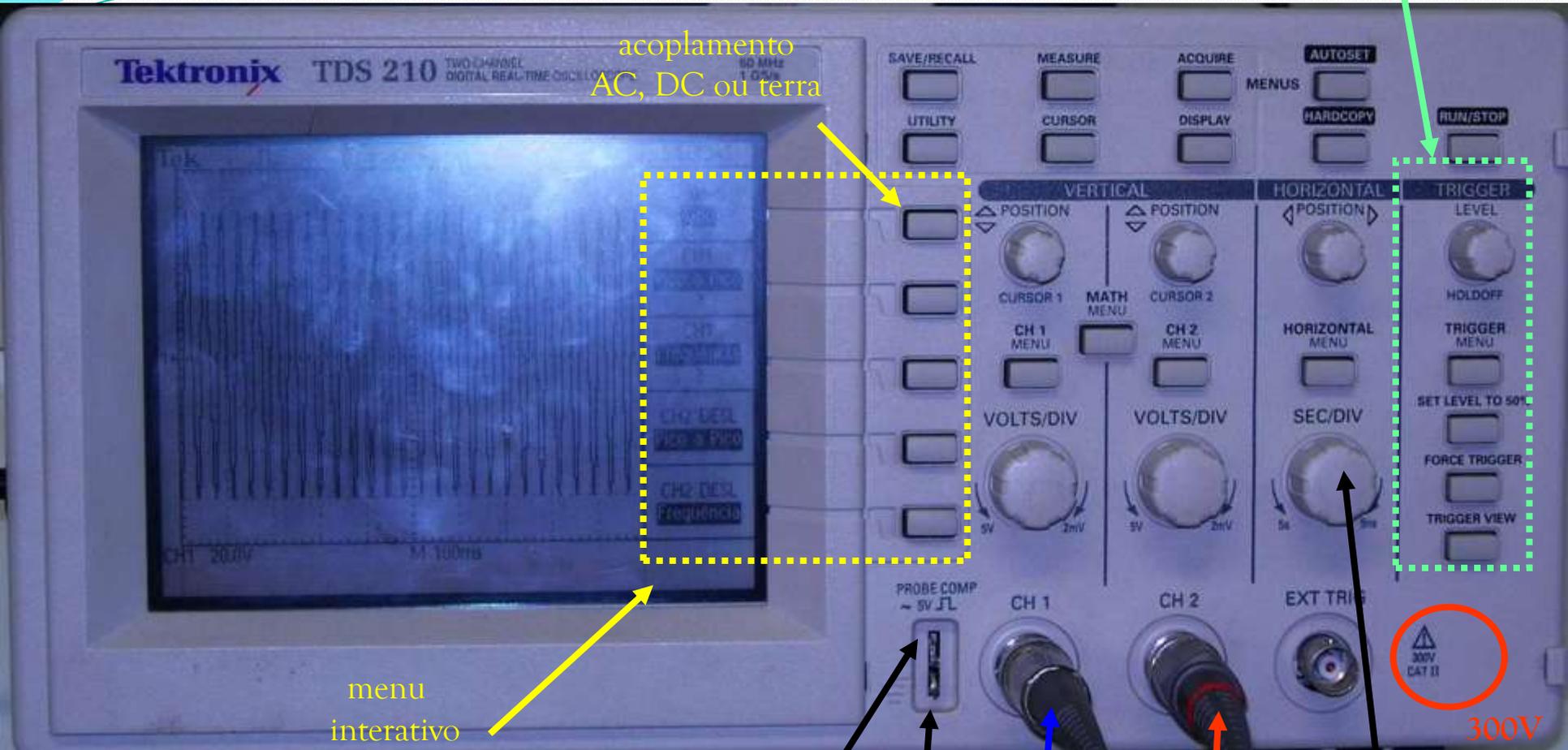
Obter experimentalmente o ganho (G_0 e Φ_G) em função da frequência (ω) e comparar com a previsão teórica

Para isto é preciso conhecer **R** e **C**.

Não confiar nos valores nominais

Osciloscópio

gatilho (trigger)



acoplamento
AC, DC ou terra

menu
interativo

referência
5V

canal 1

canal 2

varredura
(horizontal)

A ponta de prova tem atenuador
que pode ser alterado
(muda também a impedância)

300V
CAT II

Gerador de audio

IMPORTANTE!

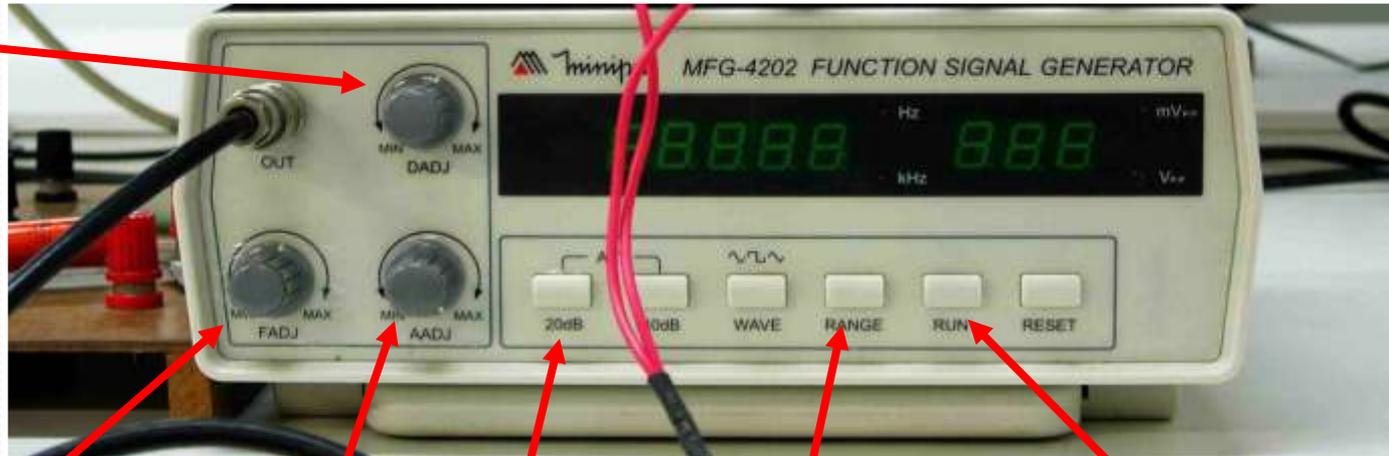
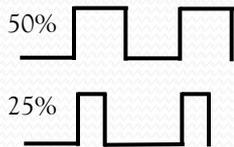


RESISTOR

CAPACITOR



Duty cycle
ADJust



Frequency
ADJust

Amplitude
ADJust

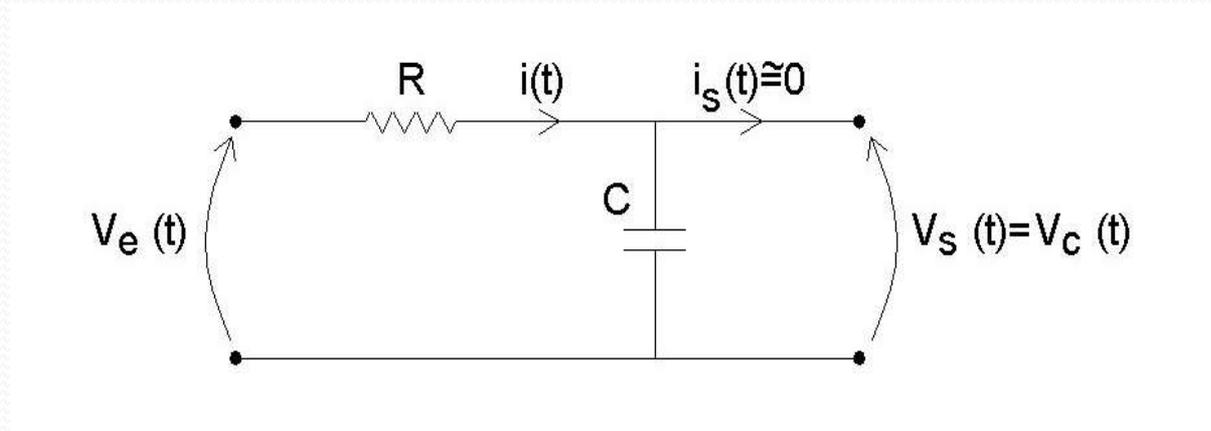
atenuador

intervalo de
frequências

Executa
parâmetro

Filtro RC: objetivos para esta semana

- Vamos estudar o filtro **RC**:



Objetivos:

→ Obter experimentalmente o ganho (G_0 e Φ_G) em função da frequência (ω) e comparar com previsão teórica

Para isto preciso conhecer **R** e **C**.

Não confiar nos valores nominais

Tarefas 1 – Filtro RC

Usando um sinal de entrada senoidal, fazer:

- Gráfico de Z_C experimental em função de ω
 - lembre-se que $Z = \text{Tensão} / \text{corrente} \rightarrow Z = 1 / \omega C$
 - Obter o valor da capacitância deste gráfico
- Gráfico de ϕ_C (fase do capacitor) em função de ω
 - Comparar com o esperado teoricamente para o capacitor
- Gráfico de G_o em função de ω
 - Comparar com o esperado teoricamente
- Gráfico de ϕ_G (fase entre V_s e V_e) em função de ω
 - Comparar com o esperado teoricamente

Tarefas 2 - Integrador

- Para frequências tais que $\omega \gg \omega_c$, mostrar que:

$$\hat{V}_s = \frac{1}{RC} \int \hat{V}_e dt$$

- Utilizando o gerador de tensões com **ONDA QUADRADA**
 - Medir V_s e V_e
 - Tirar foto do osciloscópio e entregar como atividade
 - E também:
 - Mostrar que V_s corresponde à integral de V_e :
 - Mostrar que V_s é um triângulo
 - Mostrar que a inclinação deste triângulo é compatível com a integral acima.

Tarefas 2 - Integrador

- Determine também para qual intervalo de frequências o seu circuito é um bom integrador. Justifique.
- Procure comparar os seus resultados com os do resto da sala.

Cuidados Experimentais

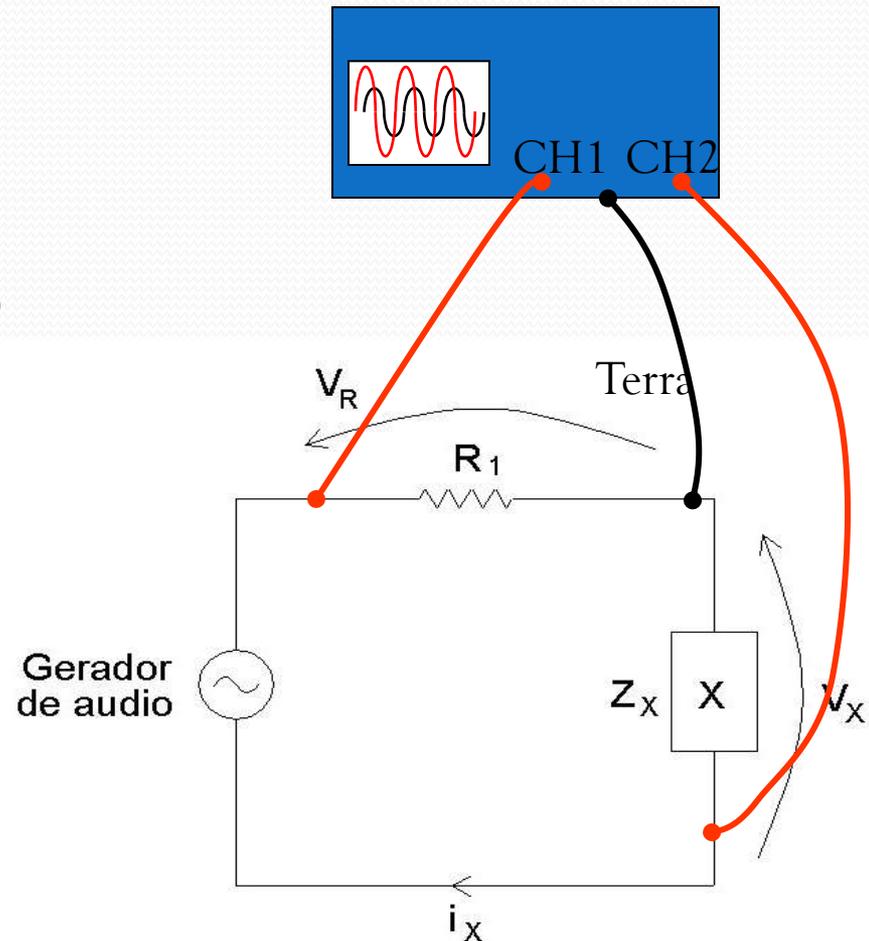
Instrumentos de medida:

- **Osciloscópio**

- Canal 1: $-i_R = -V_R/R$ é a corrente no circuito
- Canal 2: V_X

- **Cuidado com ruídos**

- Estimar incertezas na tensão e corrente a partir do nível de ruído



Ligação do osciloscópio com centro em terra. Para correta medida de fase é necessário inverter uma das medidas (ou subtrair π , da diferença de fase medida).

Cuidados Experimentais

Montagem experimental:

Cuidado, ao montar o circuito para as medidas do integrador vocês terão que ler a tensão de entrada e de saída, i.e., no gerador de áudio e no capacitor... Portanto o terra fica posicionado de maneira diferente!

