

# Física Experimental IV – FAP214

[www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex](http://www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex)

[www.fap.if.usp.br/~hbarbosa](http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa)

## Aula 2, Experiência 2

### Aumento do Diâmetro do Laser

### Difração

# Experiência II - Óptica Geométrica e Física

- Objetivos – Estudar alguns fenômenos de óptica física e geométrica
  - Estudo de lentes simples, sistemas de lentes e construção de imagens
  - Interferência e difração
  - Computador óptico
    - Análise de Fourier bi-dimensional
    - Processamento de imagens

# Processamento de Imagem

- Processamento de imagem é a técnica de alterar a imagem de maneira controlada:
  - aumentar ou diminuir a nitidez,
  - aumentar ou diminuir contraste,
  - alterar brilho,
  - eliminar detalhes, etc
- Imagem = Informação ótica, i.e, distribuição bidimensional de fluxo luminoso.

O fluxo pode ser descrito por uma função  $I(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ , que atribui um valor de irradiância  $I$  para cada ponto do espaço onde se distribui a imagem.

# Exemplos



Before  
Great Orion Nebula  
processed using Caron

After

# Processamento de imagem

- Para processar uma imagem é preciso, de alguma forma, decompô-la numa somatória de funções simples sobre as quais temos controle.
- Essas funções serão as transformadas de Fourier bidimensionais da imagem e vamos ter que aprender como encontrá-las.
- Há duas maneiras de fazê-lo:
  - uma é através de cálculo
  - outra através de um computador ótico
- **Vamos optar pelo computador ótico**

# Computador ótico

- **Computador ótico** é um dispositivo que permite a manipulação de imagem de maneira controlada sem a necessidade de efetuar cálculos complicados.
- Esse dispositivo pode e vai ser construído e estudado no laboratório e vamos, nas próximas aulas, discutir como fazê-lo em detalhe.
- Entretanto essa construção requer que:
  - **o objeto cuja imagem se quer manipular seja iluminado por uma fonte de luz coerente**
  - **se esteja bem familiarizado com padrões de difração**

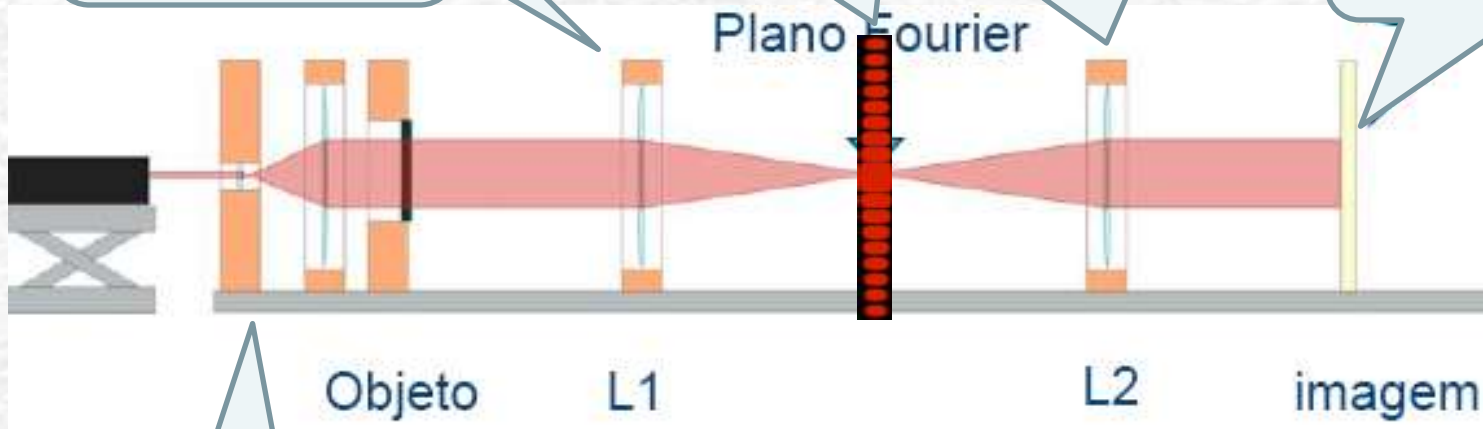
# Como funciona?

A 1ª lente faz a transformada de Fourier

... que aparece no plano de Fourier e pode ser filtrada

A 2ª lente faz a transformada inversa

Projetamos a imagem filtrada no anteparo




o laser ilumina o objeto

COMPUTADOR  
ÓTICO



# Programação da Exp. 2

- Aula 1: óptica geométrica
  - Medidas com lentes convergente e divergente 
- Aula 2: laser
  - Aumento do diâmetro do laser
  - Estudo de figuras de difração
- Aula 3: difração
  - Mínimos de difração com o espectrofotômetro
  - Transformada de Fourier
- Aula 4: computador ótico
  - Iluminar um objeto com o Laser, aplicar um filtro na transformada de Fourier e recompor a imagem filtrada
- Aula 5: ImageJ
  - Tratamento de imagem no computador



# TAREFAS SEMANA PASSADA

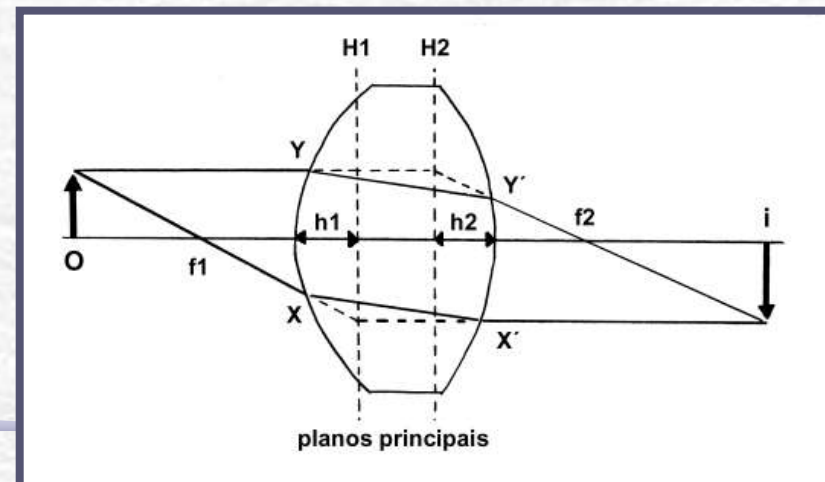


# Parte1: Lente Convergente

- Medir a distância focal de uma lente convergente com a maior precisão possível
  - Justifique o arranjo experimental utilizando simulações com o **RayTrace**.
- A aproximação de lente delgada é válida para esta lente? Quais os critérios utilizados?
  - **DICA:** observe as equações que relacionam o foco da lente com os seus parâmetros geométricos.
- Simule a lente real (lente espessa) no **RayTrace**.

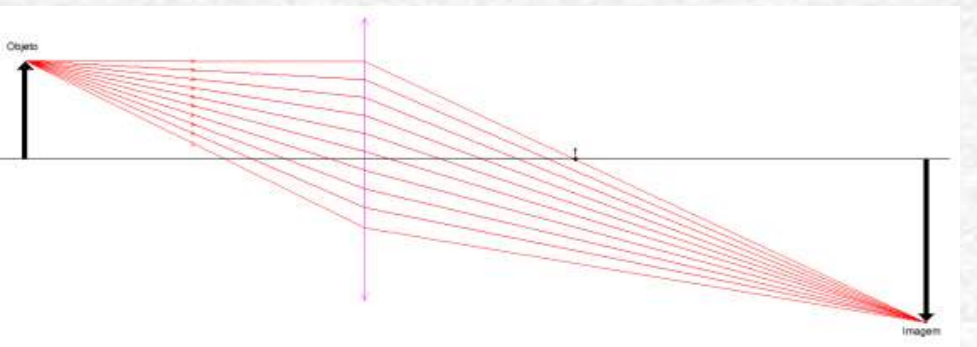
# Parte1: (cont.) Simulação

- Utilizando o dispositivo para medida de raio de curvatura e um micrômetro, meça a curvatura e a espessura da lente que está estudando.
  - Só existe um dispositivo para a medida do raio de curvatura, portanto cuidado com ele.
- Com o raio e espessura da lente, simule a posição dos seus planos principais e distâncias focais e compare com os valores previstos pelo formalismo matricial.
- Comente.



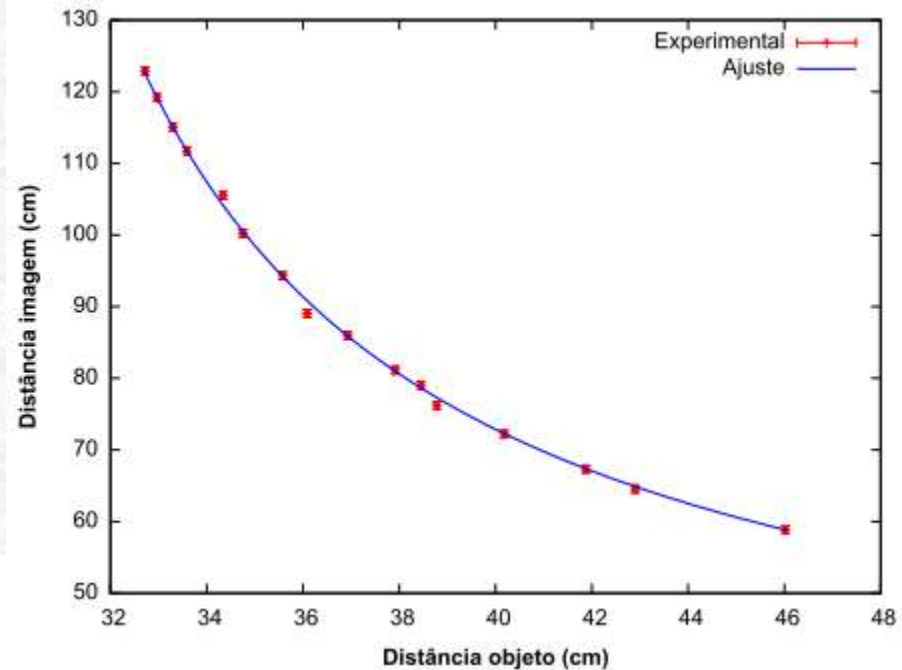
# Uma análise quase completa

## Simulação com o Raytrace para lente delgada



## Ajuste da eq. para lente delgada

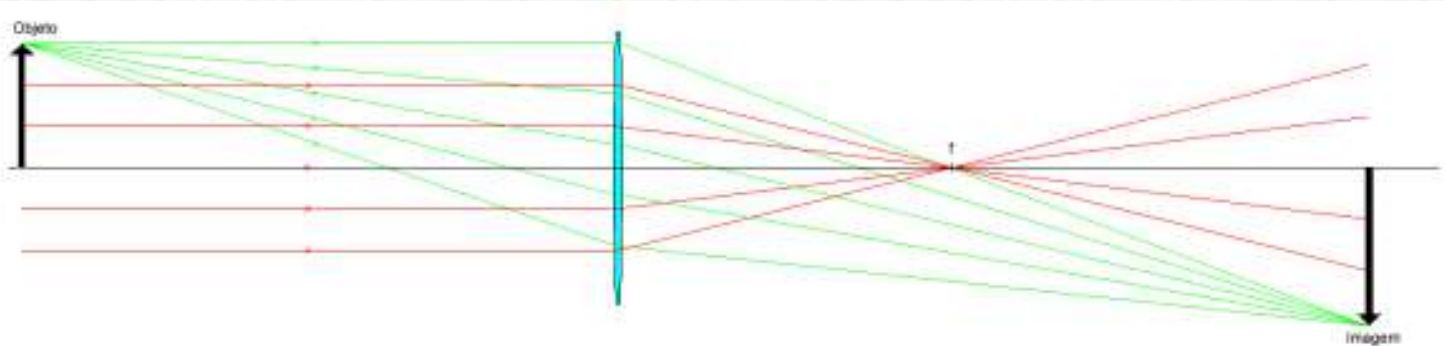
$$i = \left( \frac{1}{f_1} - \frac{1}{o} \right)^{-1},$$



em que  $f_1$  corresponde à distância focal da lente. Na figura 2, foi representado o resultado do ajuste dos dados a essa relação. Nota-se pelo gráfico que os dados são compatíveis com a relação ajustada. **Analisando o gráfico de resíduos, podemos ver que não há nenhum tipo de tendência nos dados.** Aliado a disso, o valor de  $\chi^2_{\text{red}} = 1,75$  indica que o modelo de lentes delgadas ajusta-se bem aos dados, embora as incertezas tenham sido subestimadas; de fato, a incerteza da posição de focalização (estimada em 0,5 cm) tem um caráter um pouco subjetivo, e o teste de  $\chi^2$  pode, inclusive, ser utilizado para obtermos uma melhor estimativa dessa incerteza. Do ajuste, obteve-se o valor  $f_1 = 25,825 (12)$  cm.

# Uma análise quase completa

## Simulação com o Raytrace para lente espessa



**Figura 3:** Simulação da lente convergente real (lente espessa).

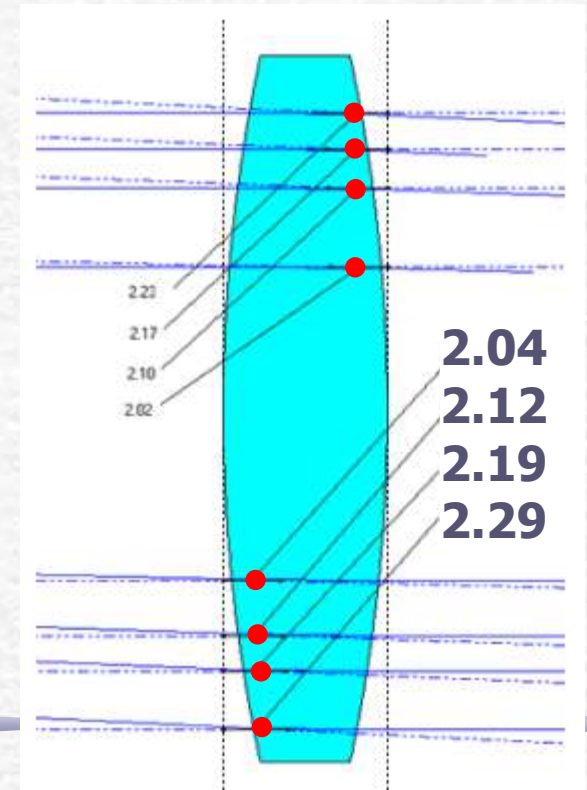
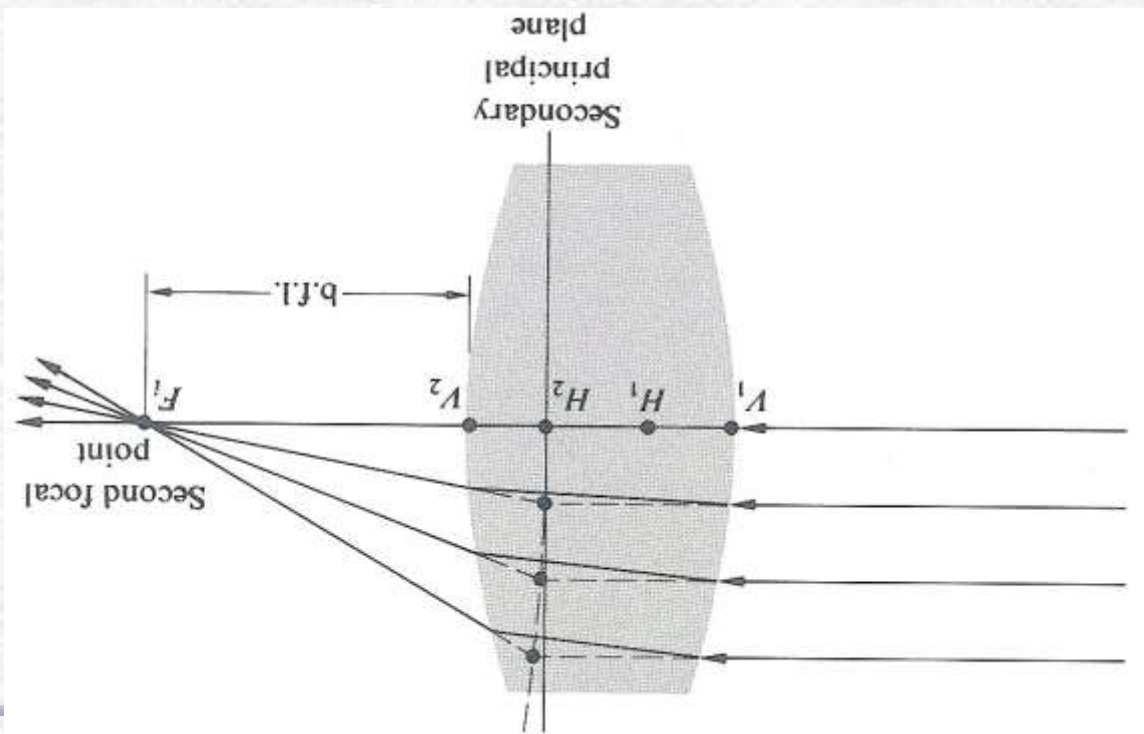
Pela simulação feita vemos que o foco (local onde os raios que incidiram paralelamente se encontram) é um ponto se comparado com a distância focal, o que novamente nos permite dizer que uma lente delgada é uma boa aproximação para a nossa lente. De fato, se aplicarmos um zoom à região do foco, veremos que os raios não se cruzam exatamente no mesmo ponto, mas a distância entre esses pontos é muito pequena se comparada com as dimensões características do arranjo.

## Simulação dos planos principais

Tentamos simular também a posição dos planos principais dessa lente. Os valores teóricos são dados pela equação (4) e valem aproximadamente  $h_1 = h_2 = 1,9$  mm, considerando um índice de refração do vidro  $n = 1,5$ . Porém, a simulação nos mostrou que essa lente não cria um plano principal, uma vez que para diferentes raios paralelos que chegam a lente, a distância da intersecção dos prolongamentos dos raios incidente com o dos raios refratados ao eixo B (representado na imagem 4) varia muito. O mesmo vale para os raios incidentes do foco que se refratam e saem

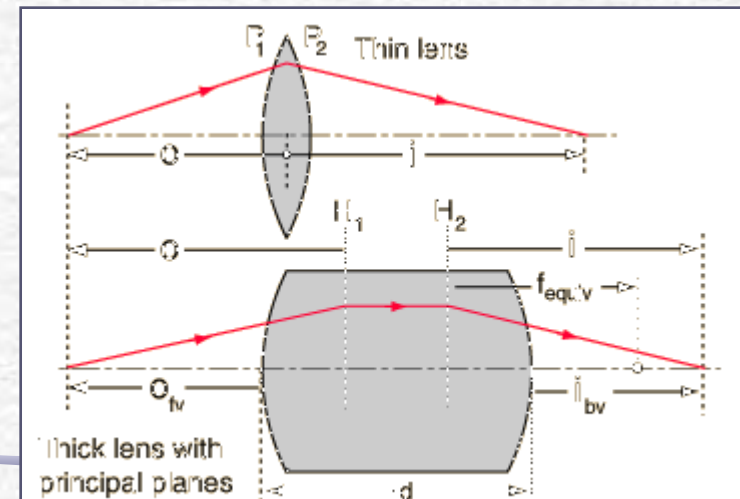
# Uma análise quase completa

- O grupo notou muito bem: os prolongamentos dos raios só convergem no plano principal próximo do eixo (aproximação paraxial.)
- Mas os deslocamentos foram na direção errada. O que aconteceu?



# Uma análise quase completa

- A espessura da lente deste grupo era 5.8mm e os planos estão em  $h_1=h_2=1.9\text{mm}$ , então a separação entre os planos é de 2mm
- Perguntas:
  - Se existe uma separação entre os planos principais, a lente pode ser considerada delgada?
  - Qual a incerteza na posição da lente? Era maior ou menor do que 2mm?
  - As distâncias  $i$  e  $o$  foram medidos até o centro da lente, mas devia ser até  $H_1$  ou  $H_2$ . Faz diferença?



# Outra Análise - 1

$$Y = AX + B \quad (4)$$

E como variamos "o" e "i" na expressão (1) temos  $Y = \frac{1}{o}$  e  $X = \frac{1}{i}$ . Como a

distância focal é fixa:  $B = \frac{1}{f}$ . Para verificar a veracidade do ajuste, além dos métodos convencionais ( $\chi^2$ , resíduos...) devemos ter no ajuste um valor e A compatível com -1

Tabela 4.1 – Ajuste dos dados

	Valor	Incerteza
A (adimensional)	-0,9639	0,0043
B (cm <sup>-1</sup> )	0,03765	0,0007
foco (cm)	26,558	-
Z (adimensional)	8,33	-

Não é compatível com 1, pois subestimaram a incerteza

Tabela 4.1: Tabela com os valores do ajuste dos dados feitos à expressão (4).

Gráfico 4.1 – Gráfico do ajuste

Provavelmente aqui existe um problema de subestimação das incertezas, pois, apesar deste ser um ajuste simples, vê-se que a compatibilidade de A com -1 não é como se esperava. As incertezas utilizadas para as medidas das distâncias é a incerteza de uma régua milimetrada comum, ou seja, 0,05cm, o que é muito pouco para a o valor real desta incerteza dado os instrumentos utilizados.

O instrumento utilizado para verificar a posição da imagem (através da projeção desta em um anteparo) era o próprio olho humano. Essa verificação é muito imprecisa, pois com uma grande variação do anteparo a imagem algumas não mudava consideravelmente permanecendo nítida para intervalos maiores que 4cm.

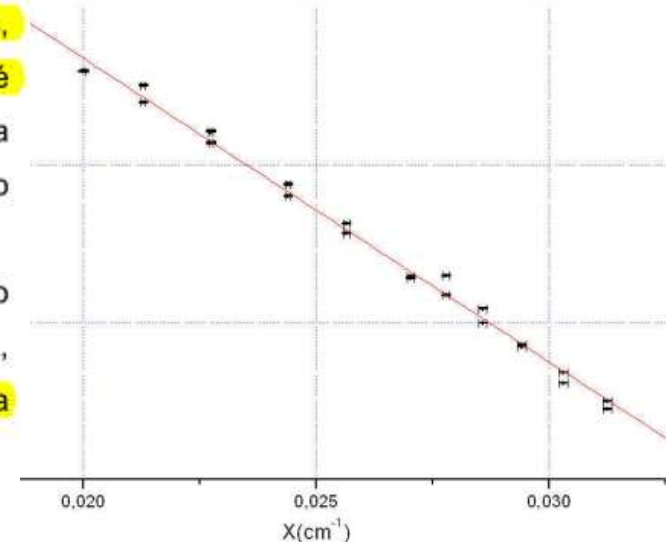


Gráfico 4.1: Pontos ajustados na expressão (4) com incertezas em x e y.



# Outra Análise - 1

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{(n-1)^2}{n} \left( \frac{t}{R_1 R_2} \right) \quad (2)$$

Em que  $n$  é o índice de refração da lente,  $t$  a espessura,  $R_1$  o raio de curvatura da primeira superfície e  $R_2$  o da segunda superfície. [1] Se pudermos desprezar o termo com  $t$  nesta expressão teremos uma lente delgada. Como, no caso deste experimento  $t \sim 0.4\text{cm}$  e  $R \sim 10\text{cm}$  podemos considerar  $R \gg t$  e, com isso, considerar que as lentes são delgadas.

Uma forma de verificar se a aproximação é razoável (após obter o resultado) é comparar o resultado com a fórmula acima para  $t=0$ . Como  $R_1 = -R_2 = R$  e  $n=1.5$  (para o vidro) teremos:

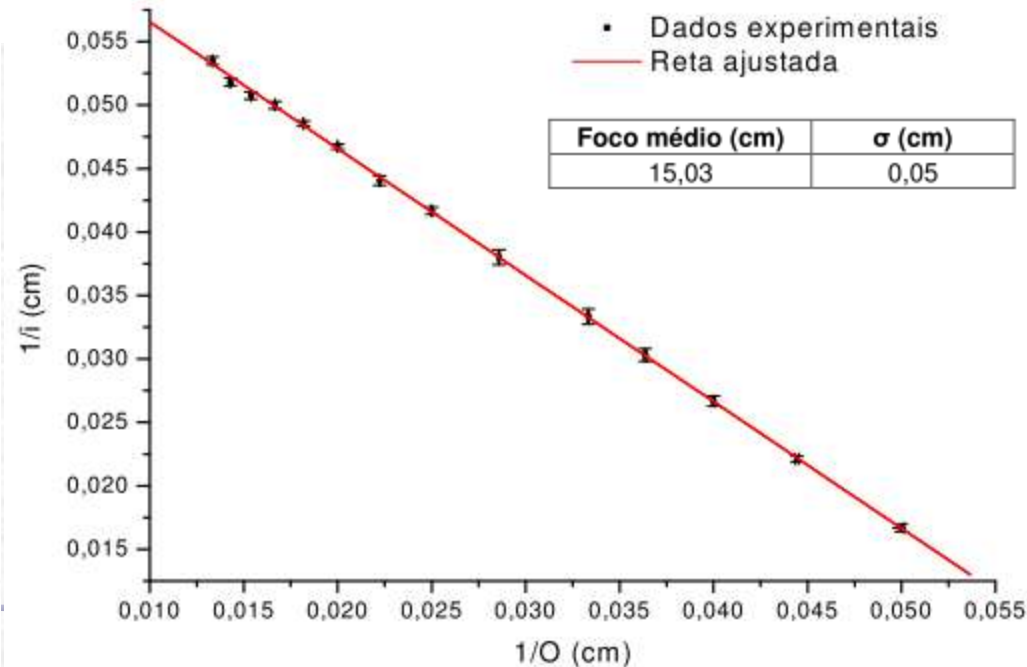
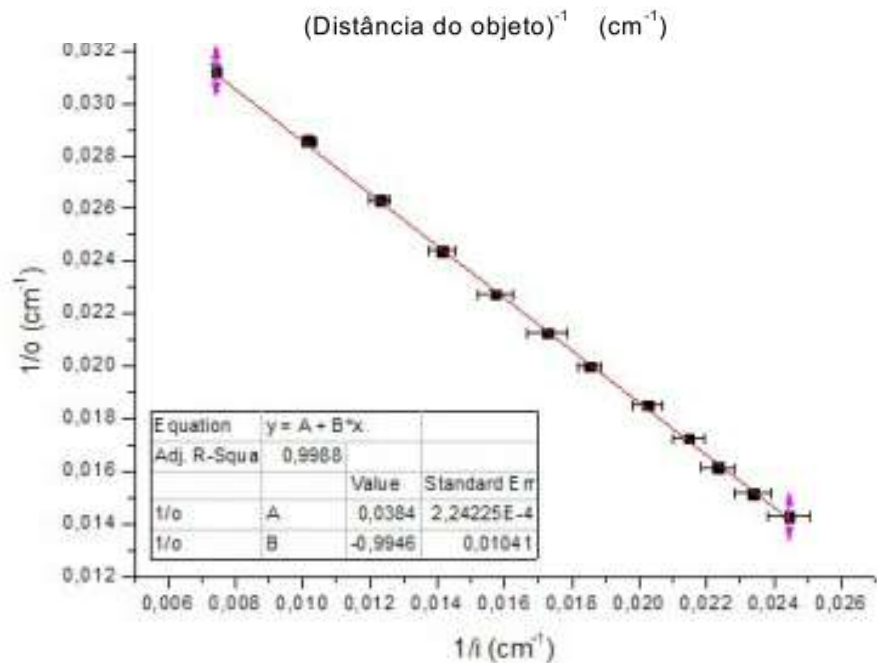
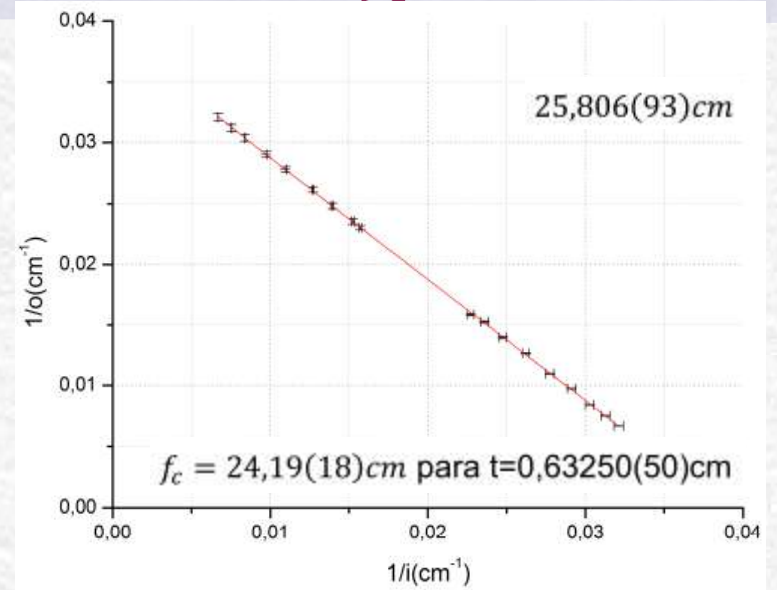
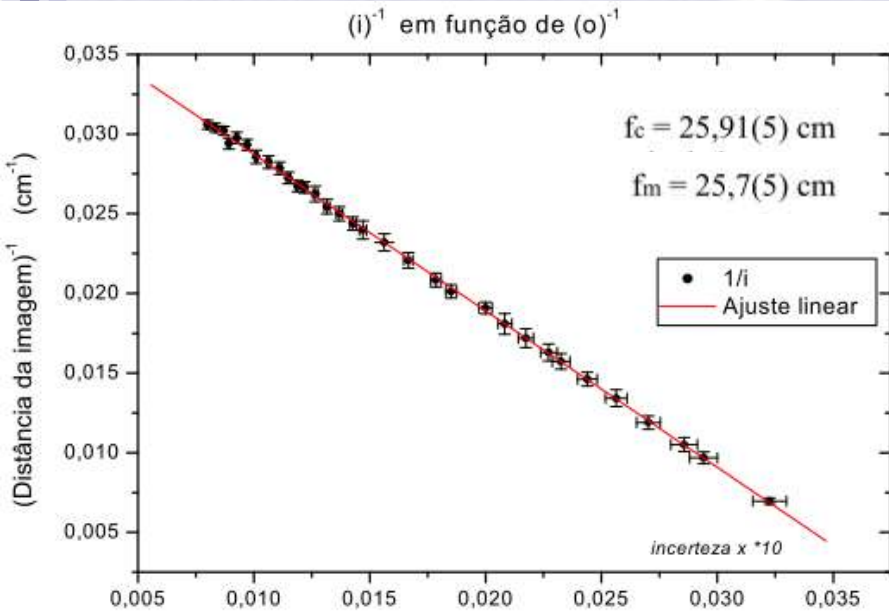
$$\frac{1}{f} = (1,5-1) 2 \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R} \Rightarrow f = R$$

**Ainda assim  
conseguiram  $R \sim f$**

Tabela 4.2 – Comparação do raio de curvatura		
	Valor	Incerteza
Raio de curvatura (cm)	25,93	0,26
foco (cm)	26,558	0,078
Z (adimensional)	2,35	-

Tabela 4.2: Comparação da distância focal com o raio de curvatura.

# Outras Análises: Convergente



# Parte2: Divergente e Associação

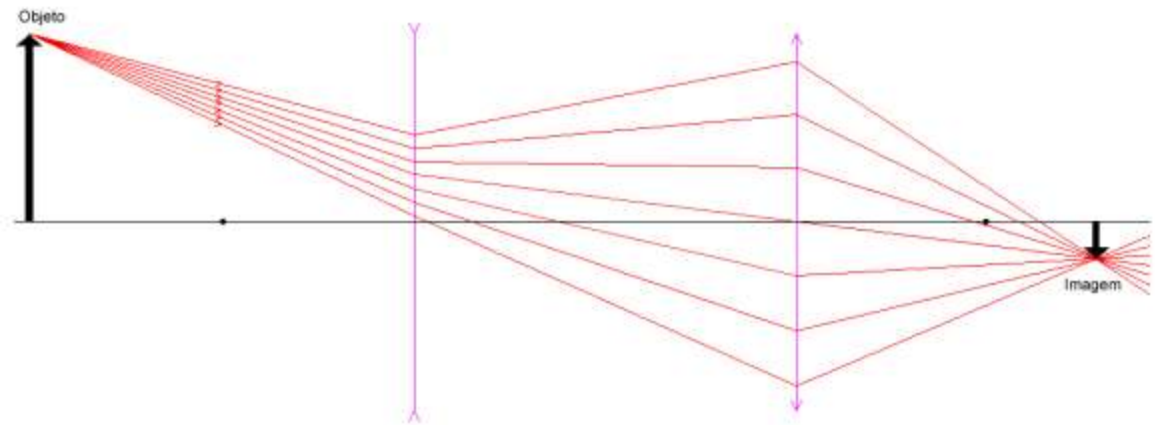
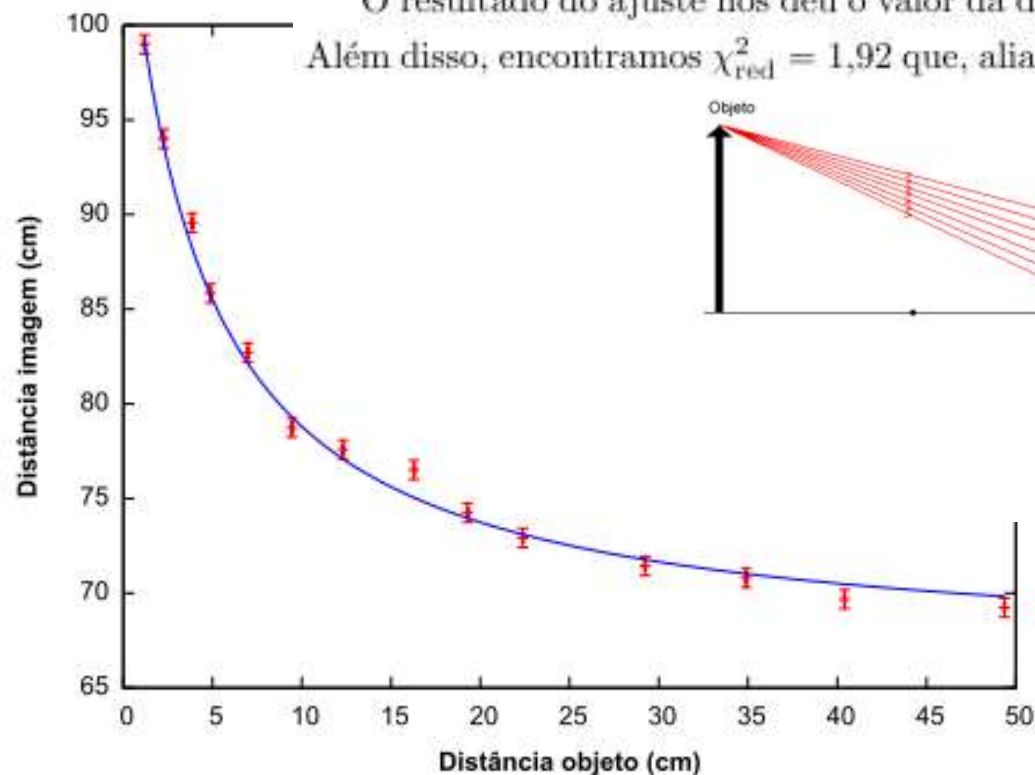
- Medir a distância focal de uma lente divergente com a maior precisão possível
  - Justifique o arranjo experimental utilizando simulações com o RayTrace.
  - **DICA:** só é possível fazer a medida associando uma lente convergente. Porque?
- Qual a distância focal equivalente desta associação de lentes?
  - DICA: Simule no RayTrace e identifique as posições dos planos principais e encontre a distância focal da associação.

# Uma análise quase perfeita

Para uma associação entre duas lentes 2 e 1, separadas por uma distância  $d$  e atingidas nesta ordem por um feixe de luz, com distâncias focais  $f_1$  e  $f_2$ , podemos aplicar a equação (1) a duas situações distintas: (a) um objeto à distância  $o$  da lente 1 é projetado a uma distância  $s$  da lente; (b) a imagem gerada pela lente 1 funciona como objeto da lente 2, a uma distância  $d - s$  dela. A distância imagem (em relação à lente 2) será então dada por

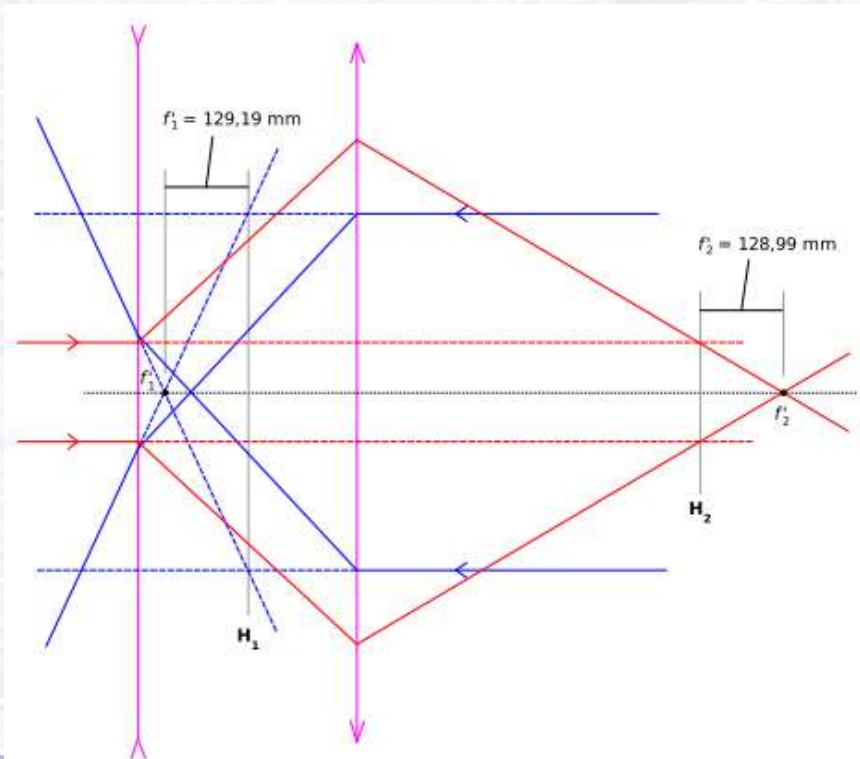
$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{d-s} = \frac{1}{f_1} - \left[ d - \left( \frac{1}{f_2} - \frac{1}{o} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (2)$$

O resultado do ajuste nos deu o valor da distância focal da lente divergente  $f_2 = -8,29(13)$  cm. Além disso, encontramos  $\chi^2_{\text{red}} = 1,92$  que, aliado ao gráfico dos resíduos, nos diz que, assim como no

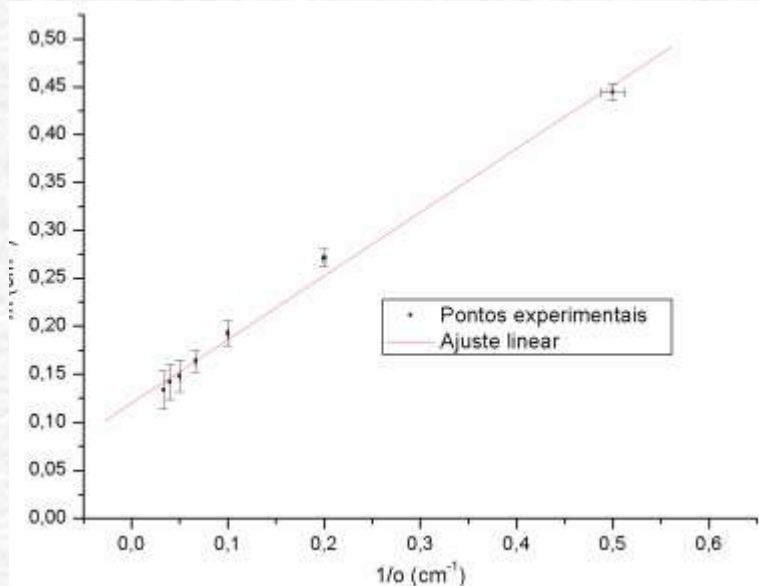


# Uma análise quase completa

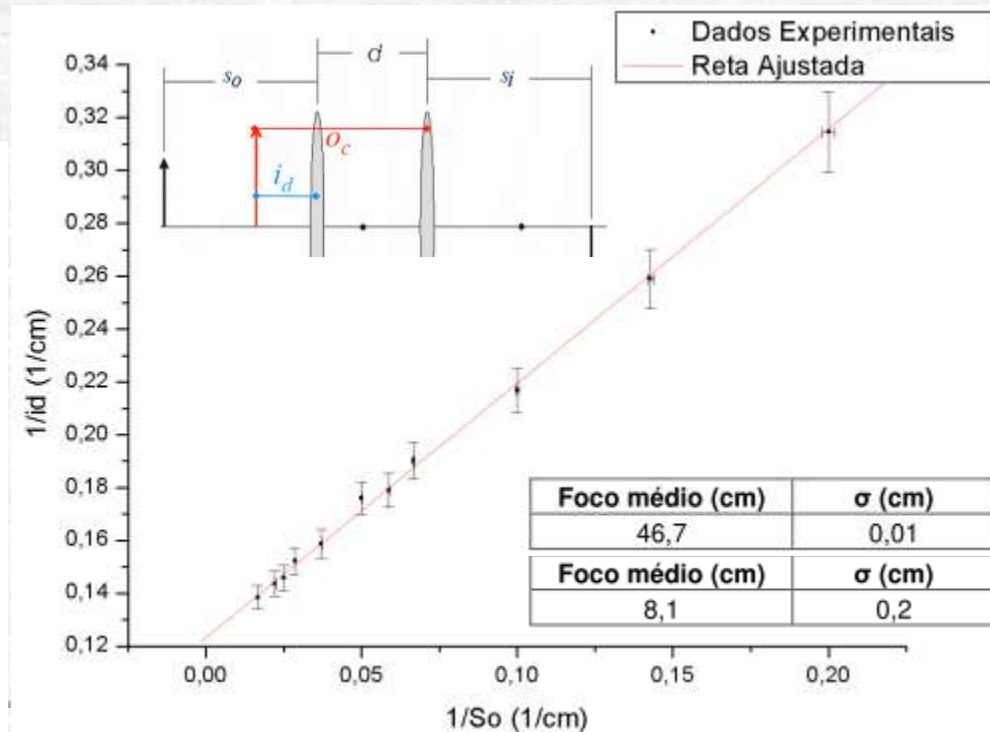
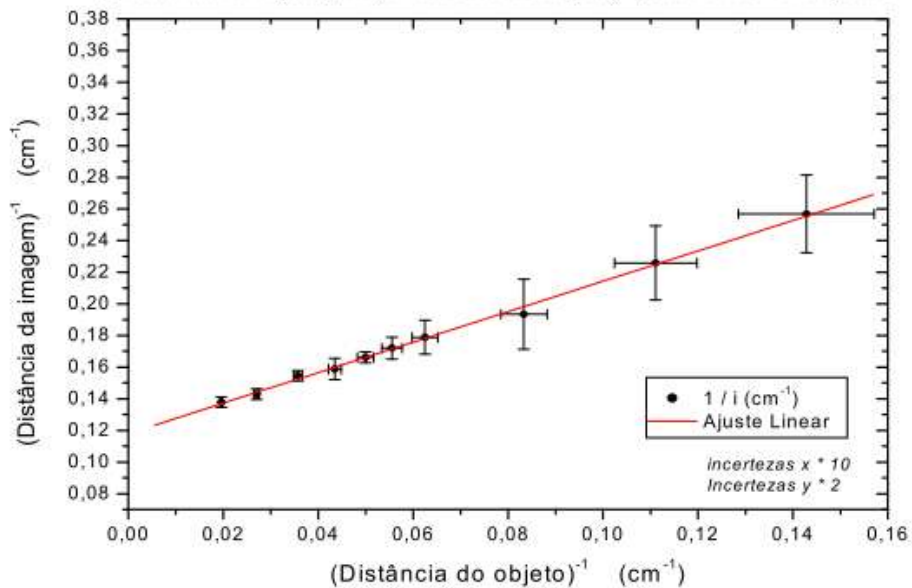
As duas distâncias focais ( $f'_1 = 129,19$  mm e  $f'_2 = 128,99$  mm) são muito próximas, podendo ser consideradas iguais dentro das limitações do programa usado — podemos tomar sua média aritmética  $f' = 129,09$  mm. Esses valores são muito próximos ao valor teórico da distância focal  $f_{eq}$  equivalente de uma associação de duas lentes, conforme (3). Para as condições do experimento, obtemos  $f_{eq} = 131,02$  (11) mm, valor bastante próximo dos encontrados através da simulação, embora incompatível com eles. Novamente, devemos considerar as limitações do programa, e lembrar que  $f'_1$  e  $f'_2$  também têm suas incertezas, que não foram consideradas nessa análise.



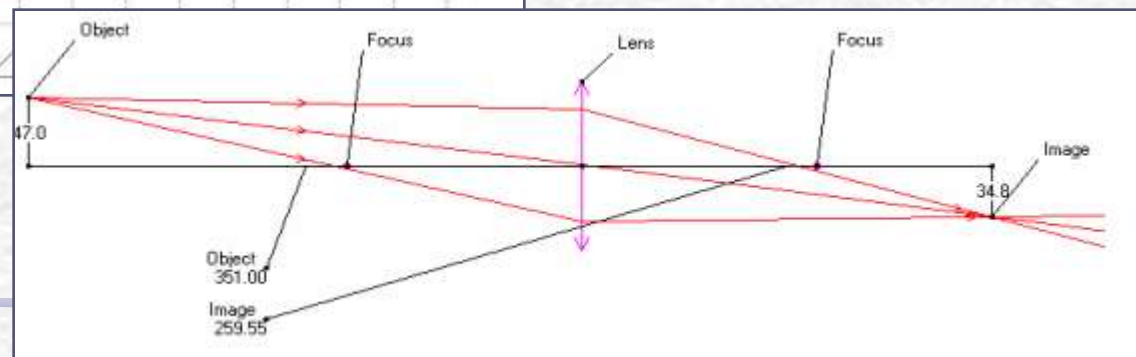
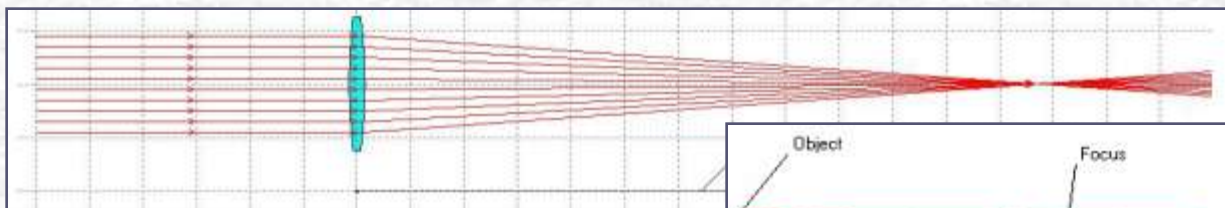
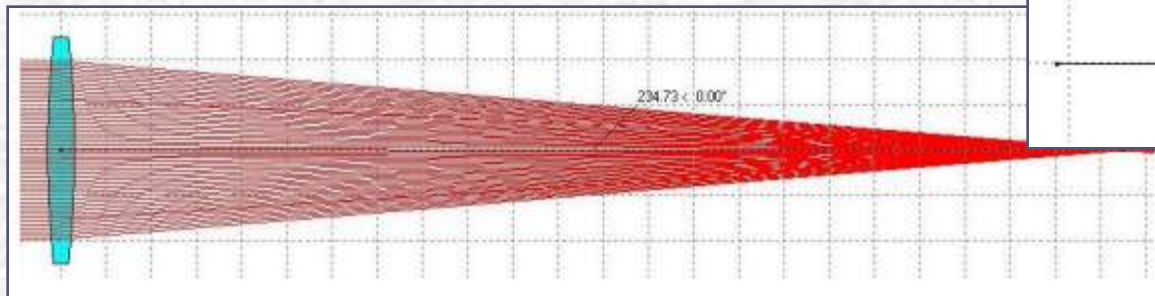
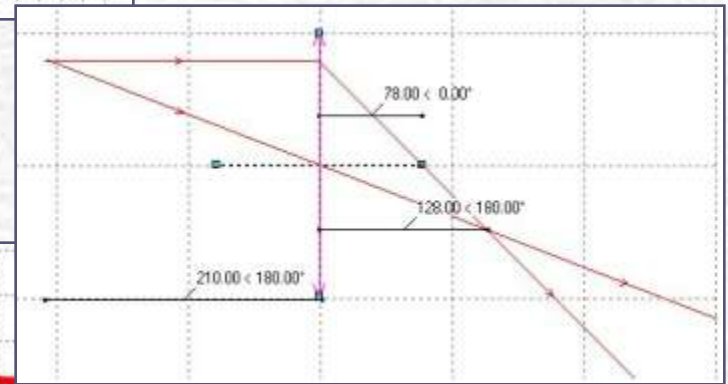
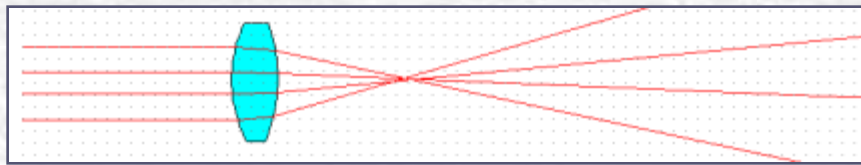
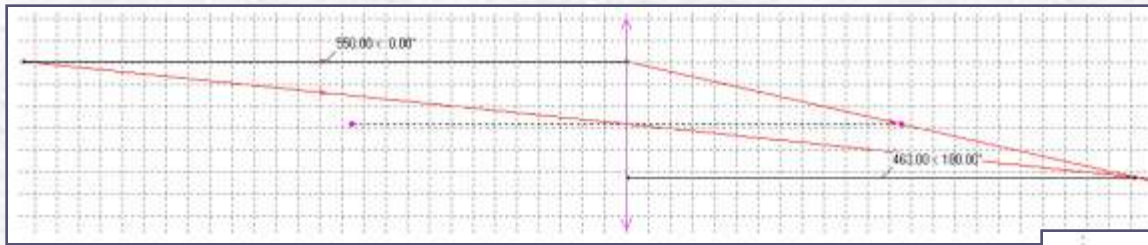
# Outras Análises: Divergente



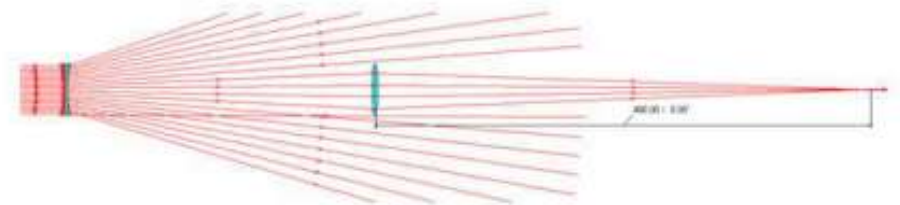
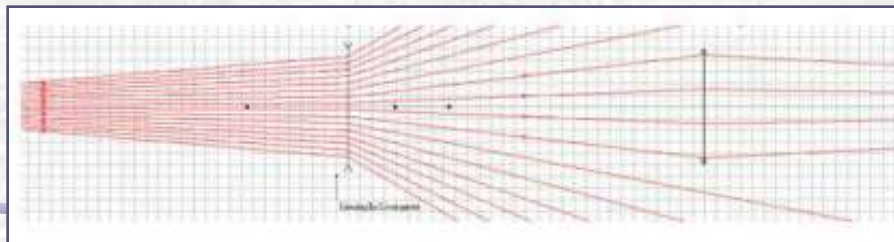
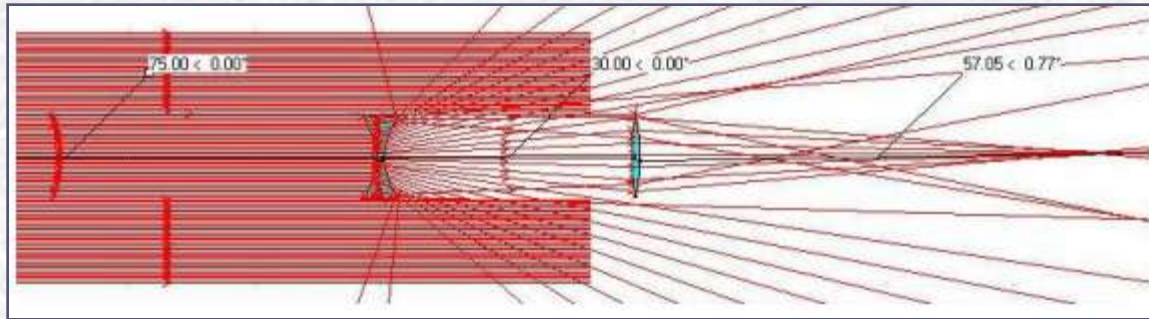
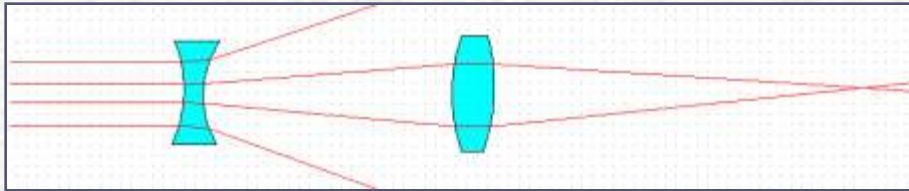
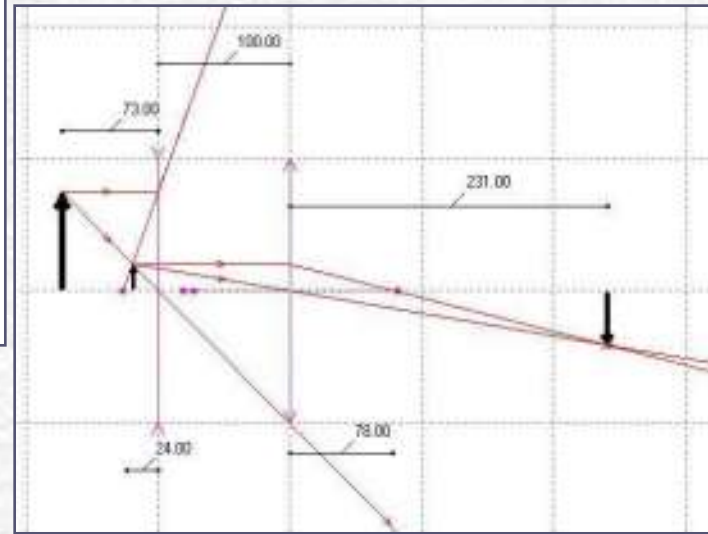
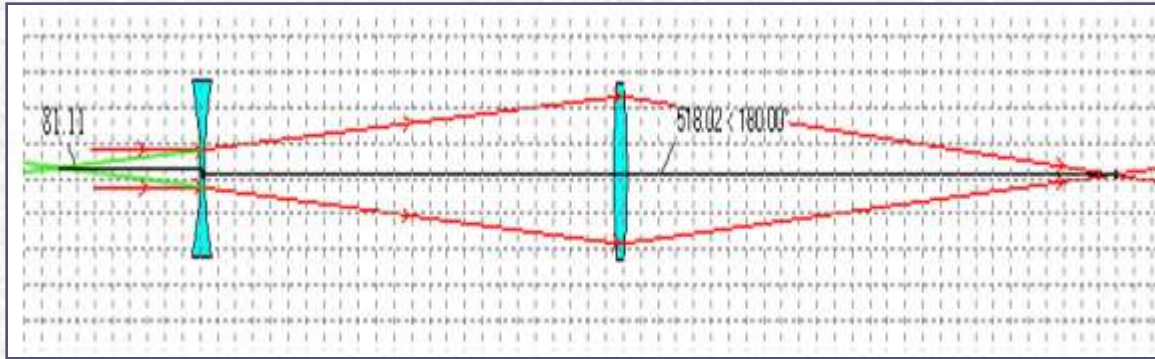
$(\text{Distância imagem})^{-1} \times (\text{Distância do objeto})^{-1}$  para lente divergente



# SIMULAÇÕES COM *RAYTRACE*

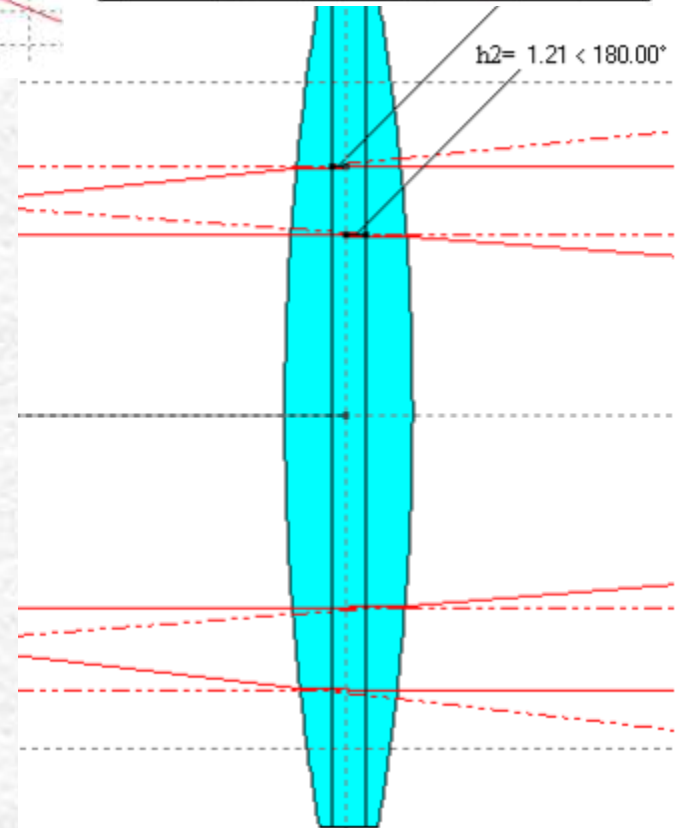
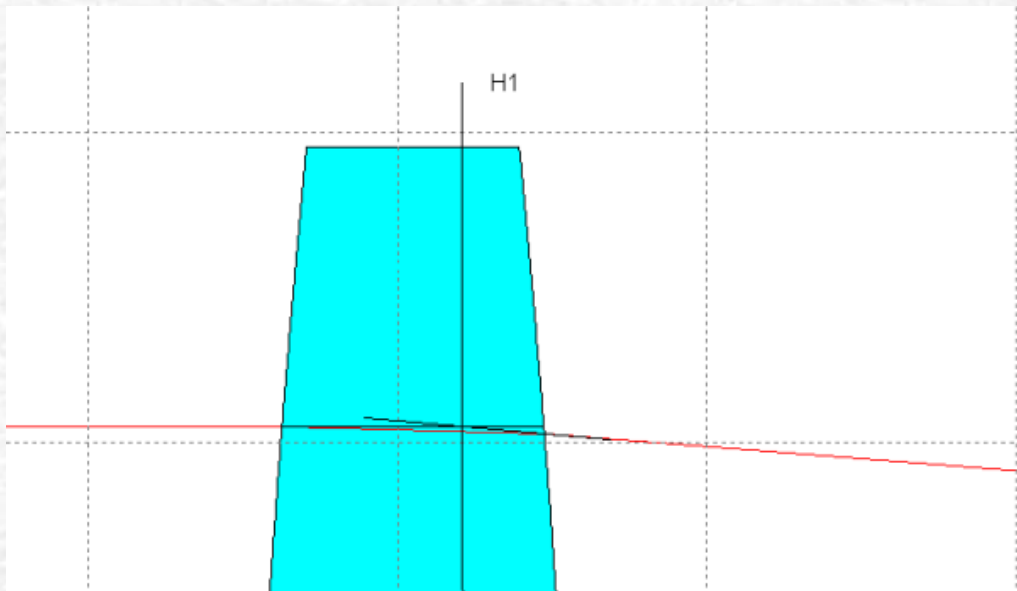
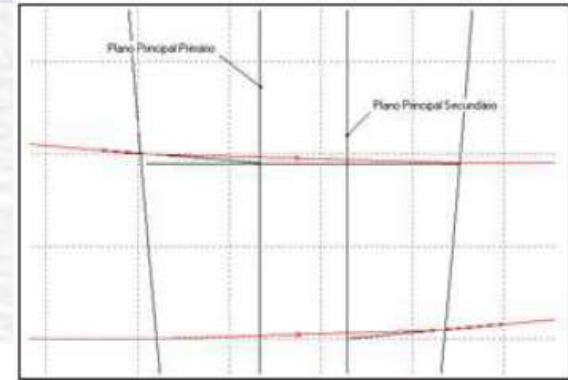
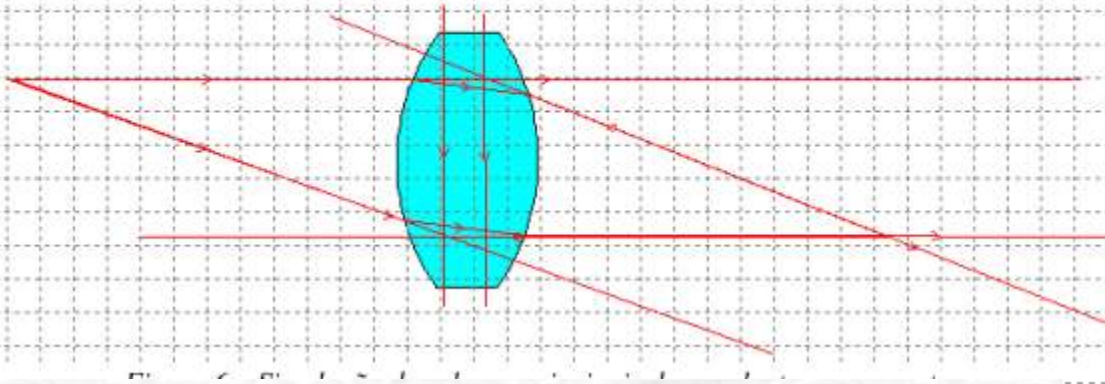


# SIMULAÇÕES COM *RAYTRACE*



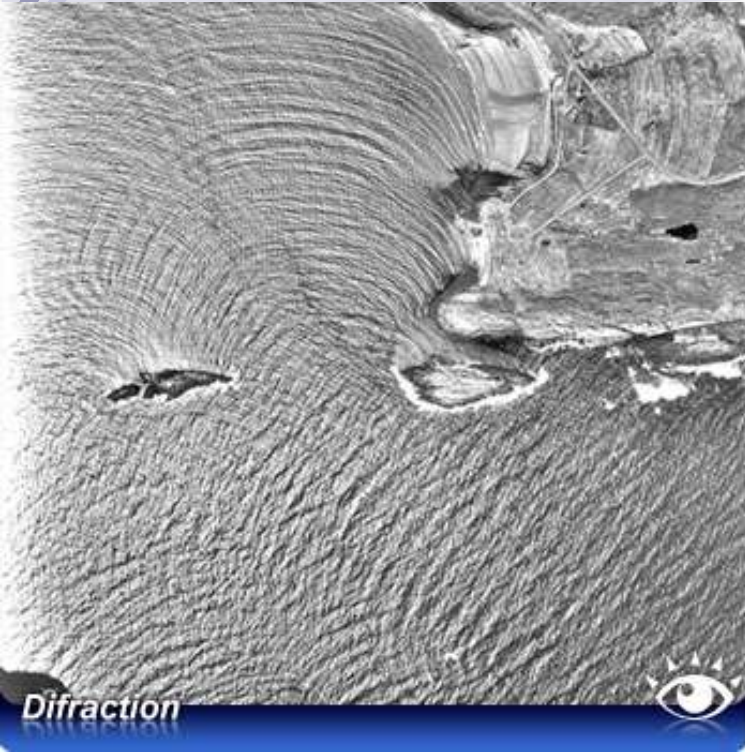


# SIMULAÇÕES COM *RAYTRACE*

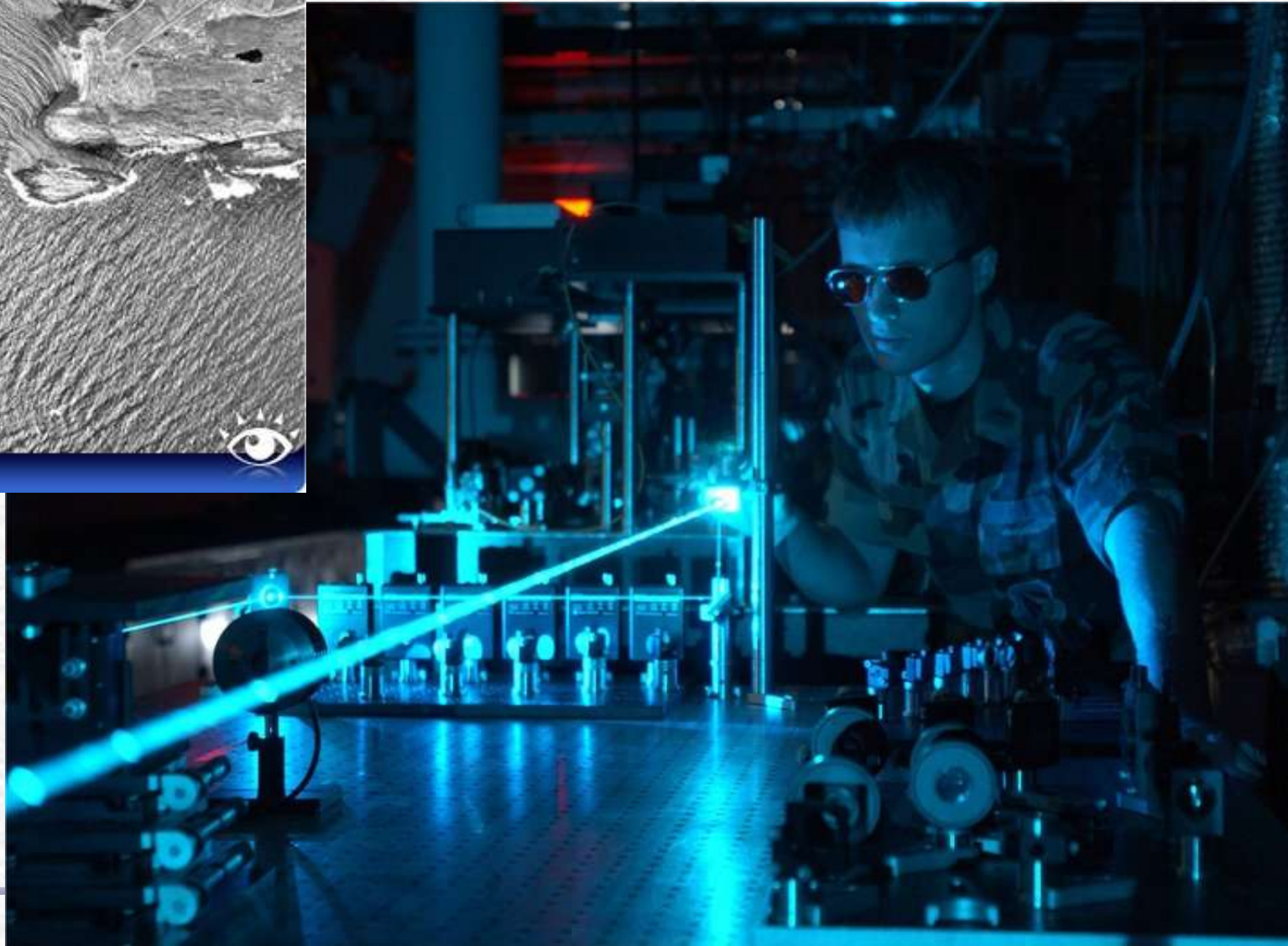


# AULA DE HOJE

## Difração



**LASER**



# Aula de Hoje

## Para o Computador Óptico precisamos:

- **Iluminar o objeto com luz coerente:**
  - **Problema:** a fonte de laser disponível só permite iluminar objetos muito pequenos, porque o diâmetro do feixe é da ordem de **1 a 2mm**
  - **Solução:** temos que aumentar o diâmetro desse feixe para iluminar objetos da ordem de alguns cm
- **Estudar o padrão de difração:**
  - Pode-se fazê-lo utilizando o laser e vários objetos de formas diferentes e estudar as figuras de difração que eles produzem

**Estas são as tarefas desta semana!**

# LASER: Histórico



- **1917** ► Einstein demonstrou que a emissão estimulada de radiação era possível
- **1939** ► V. A. Fabricant apresenta a idéia de amplificar a radiação emitida através de emissão estimulada
- **1952** ► N. G. Basov + A. M. Prokhorov e C. H. Townes apresentam independentemente a idéia de amplificador para microondas. Nos dois anos seguintes eles construíram (no Inst. Lebedev (URSS) e Univ. Columbia (USA)) o primeiro Maser.
- **1964** ► Os físicos acima receberam o prêmio Nobel por esses trabalhos.

**LASER = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation**



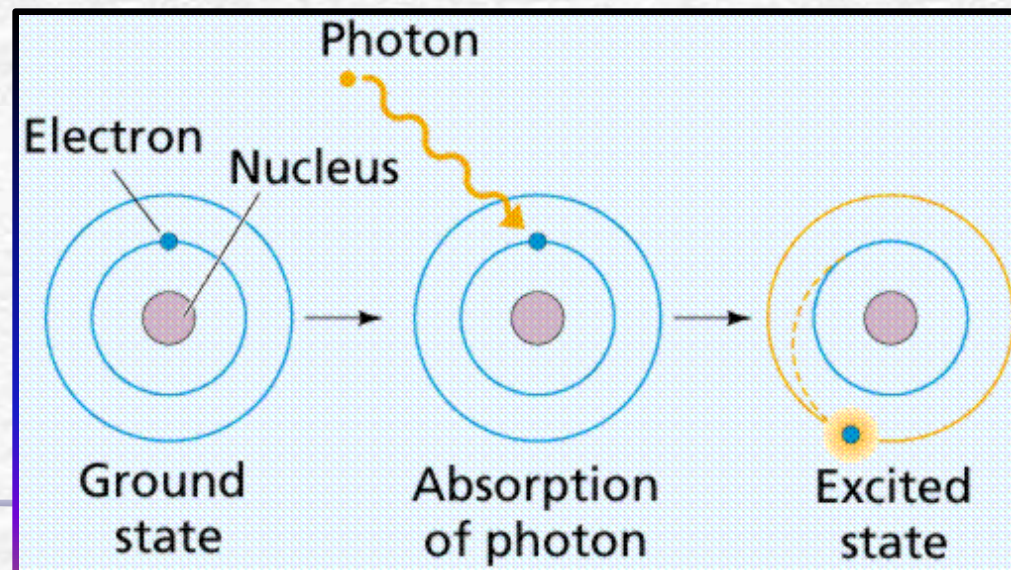
# LASER: características



- **Monocromática:** ela consiste de uma única cor ou comprimento de onda. Embora haja atualmente lasers que geram mais de um comprimento de onda, a luz de um laser comum é muito pura, ou seja, ela consiste de um intervalo muito estreito de comprimentos de onda
- **Direcional:** o feixe é bem colimado (ou paralelo), e atravessa longas distâncias com pouca divergência
- **Coerente:** todos os trens de onda que compõem o feixe, estão se movendo juntos no espaço e no tempo: estão em fase.

# Um pouco de Quântica...

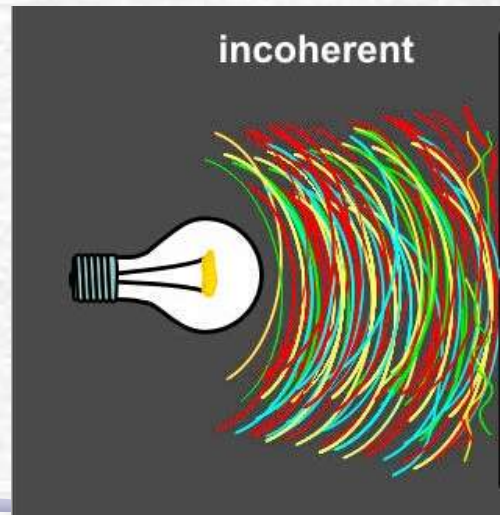
- A radiação eletromagnética é quantizada, e o “quantum” de energia eletromagnética é o **fóton**.
- Energia também é quantizada e por isto apenas algumas órbitas são possíveis para os elétrons ligados aos núcleos.
- Como os elétrons podem mudar de órbita?
  - Para uma órbita de **maior** energia: por **absorção** de energia (radiação, colisões térmicas, etc.)
  - Para uma órbita de **menor** energia: por **emissão** de um quantum de radiação (fóton)
- A energia trocada é exatamente a diferença de energia entre as órbitas, ou seja os fótons tem a mesma frequência e comprimento de onda.



# Luz incoerente

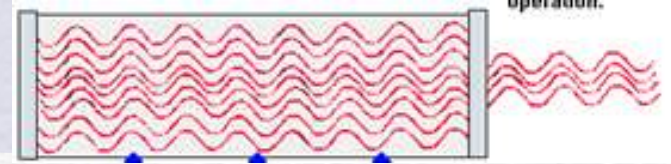


- Lâmpada comum: átomos são excitados por colisões térmicas e voltam às órbitas de menor energia depois de um intervalo de tempo emitindo um fóton.
  - Tanto a excitação como a emissão são randômicas

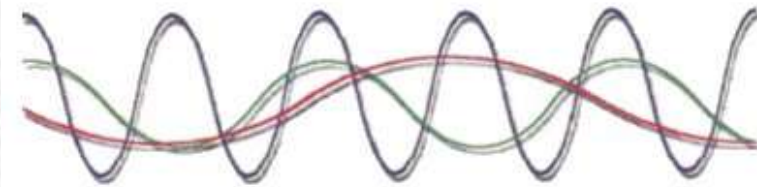


A luz da lâmpada é uma combinação de muitos trens de ondas sem uma direção de propagação definida (diverge) e sem relações de fase definidas (incoerente)

# Luz laser



- No laser os elétrons dos átomos emitem na mesma direção e ou ao mesmo tempo ou com diferença de tempo igual a um ou mais períodos de oscilação da onda:.
- O resultado é uma combinação coerente de ondas, colimadas e com uma intensidade muitíssimo maior que a da emissão incoerente.



Sunlight (many different colors)



LED: one color (monochromatic) and waves not in phase (non-coherent)



LASER: One color (monochromatic) and waves in phase (coherent)

Para saber mais veja a apostila de Complementos 2, (Vuolo), p.194 ou "Physics" de Ohanian p.942





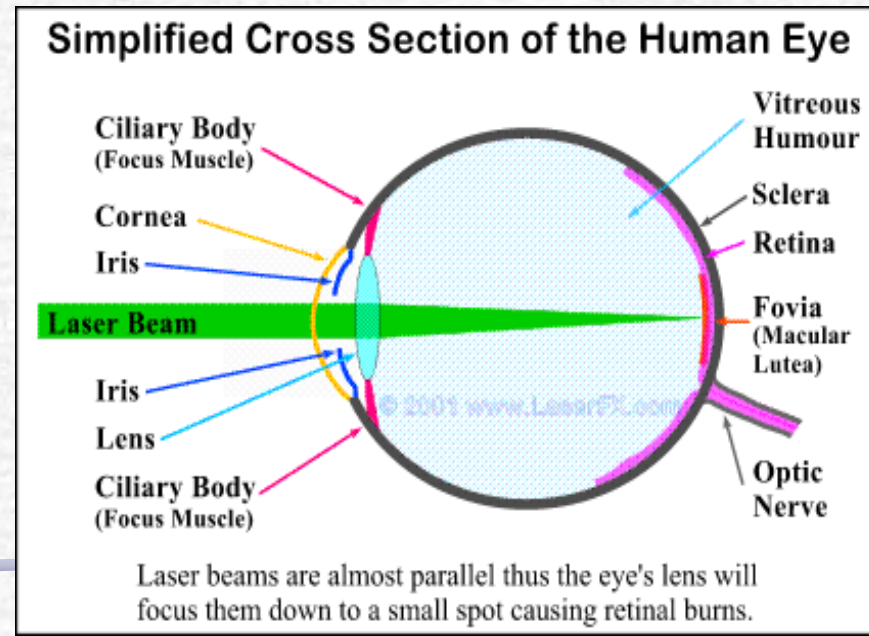
# Atenção



- O laser representa grande perigo para os olhos porque a retina é extremamente sensível à luz.
- Você sabe que luz proveniente do sol, focalizada por uma lente pode matar formigas, o laser que é um feixe intenso de luz coerente, ao ser focalizado pelas lentes oculares na retina, queima as células do ponto atingido.

- **O dano é irreversível**

portanto jamais olhe ou aponte um laser para os olhos de alguém, mesmo lasers de chaveirinhos



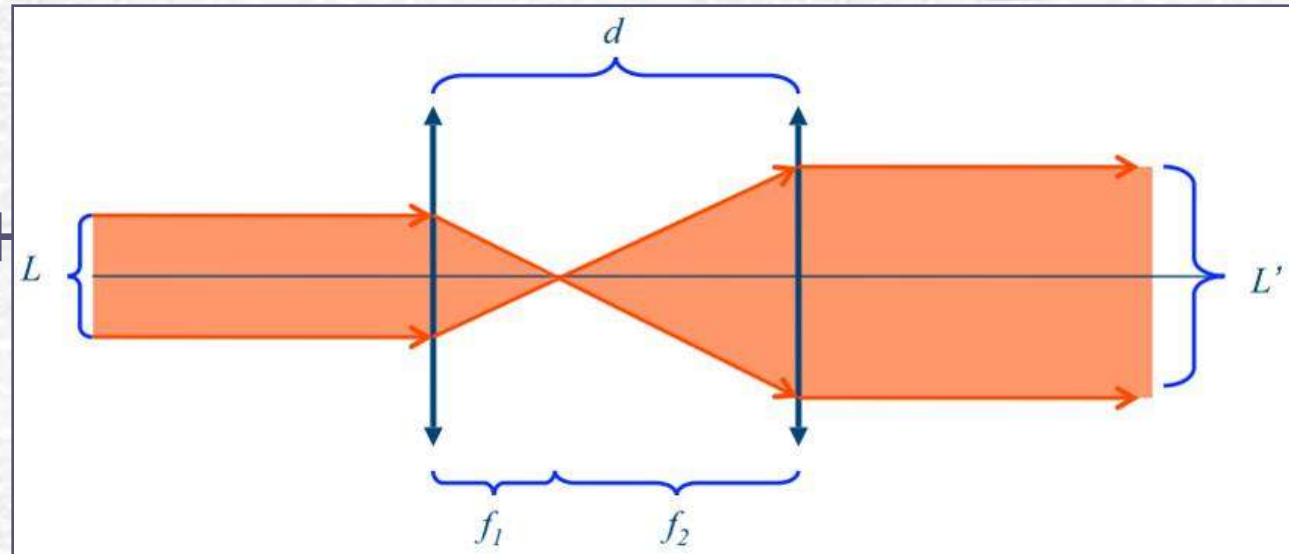
# Aumento do diâmetro do feixe do laser

- Construir um **sistema de lentes** para aumentar o diâmetro de um feixe de laser sem perda do paralelismo do feixe.
- Medir a magnificação do sistema
  - Razão entre o diâmetro de entrada e de saída
- **Duas opções:**
  - Sistema convergente + convergente
  - Sistema divergente + convergente

# Opções

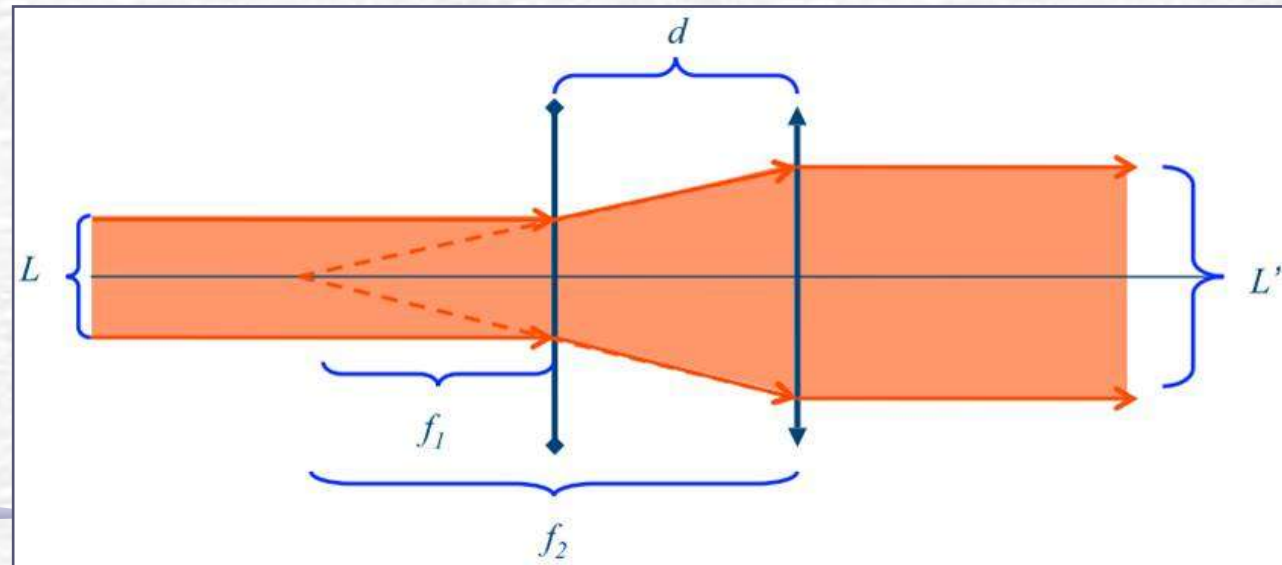
- Sistema convergente + convergente

Vamos usar esta opção!



Os raios entram e saem paralelos!

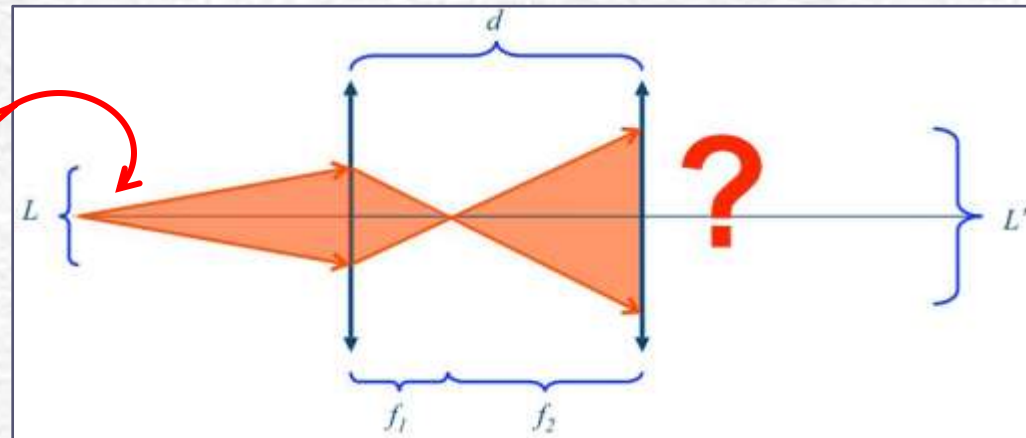
- Sistema divergente + convergente



# Possíveis Problemas

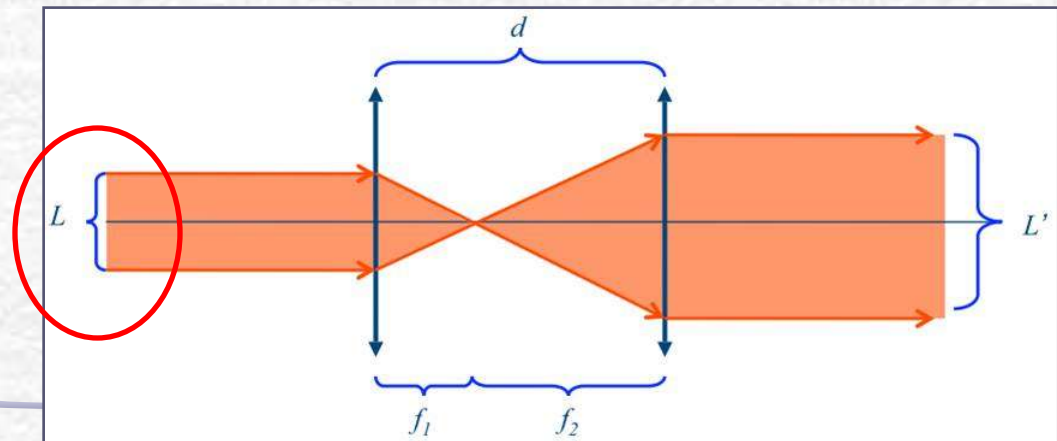
- E o feixe incidente tiver divergência não nula? O que muda?

Define-se a divergência como sendo o ângulo de abertura do feixe



- Como medir o tamanho inicial,  $L$ , do laser?
  - Quase pontual
  - Muito brilhante

$$M = \frac{L'}{L}$$



# Para esta Semana: Parte 1

- Utilizando duas lentes convergentes de foco  $f_1$  e  $f_2$ , separadas de uma distância  $d$ , obtenha, utilizando o método matricial:
  - Qual a distância de separação entre elas ( $d$ ) para que o feixe de laser saia sem divergência?
  - Qual a magnificação obtida por este sistema?
  - Verifique os resultados com o Raytrace
- Monte um sistema de duas lentes para magnificar o feixe de laser em 20 vezes, mantendo-o paralelo na saída
  - meça a magnificação. Compare com a expectativa teórica.
  - meça a distância entre as lentes e compare com a expectativa teórica.
- Problemas:
  - O feixe emergente do sistema tem divergência nula? Verifique.
  - O feixe incidente no sistema possui divergência? O que muda, do ponto de vista teórico se a divergência inicial do laser não é nula? O experimento é sensível a isto? Discuta.

# Dicas: Método Matricial

- Sejam duas lentes de foco  $f_1$  e  $f_2$ , separadas de uma distância  $d$ . Basta multiplicar as matrizes:

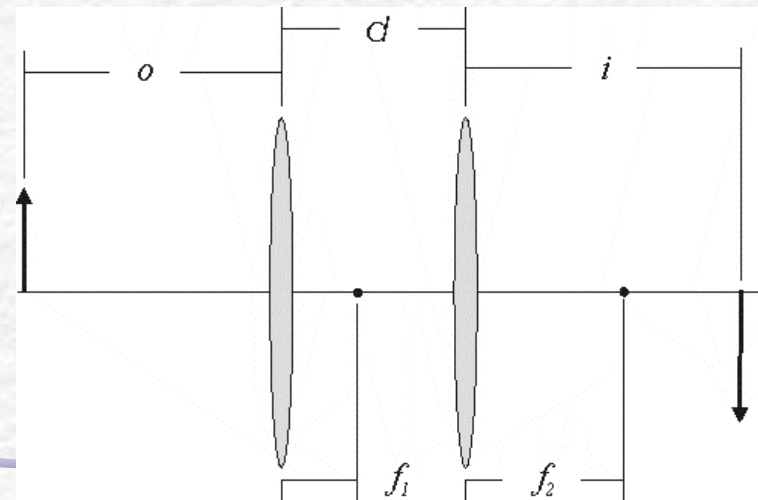
$$M_{o \rightarrow i} = M_{l_2 \rightarrow i} \cdot M_{l_2} \cdot M_{l_1 \rightarrow l_2} \cdot M_{l_1} \cdot M_{o \rightarrow l_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix}$$

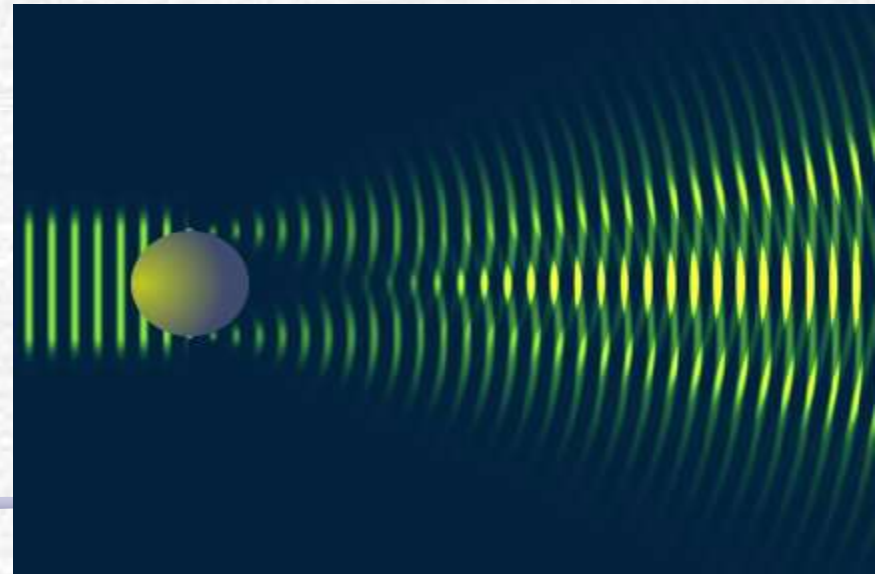
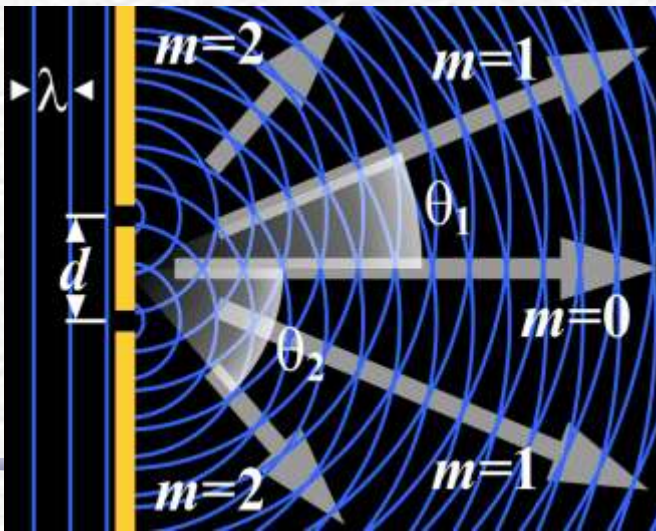


- O raio entra e sai paralelo, portanto  $\phi_1 = \phi_2 = 0$
- Magnificação =  $r_2/r_1$



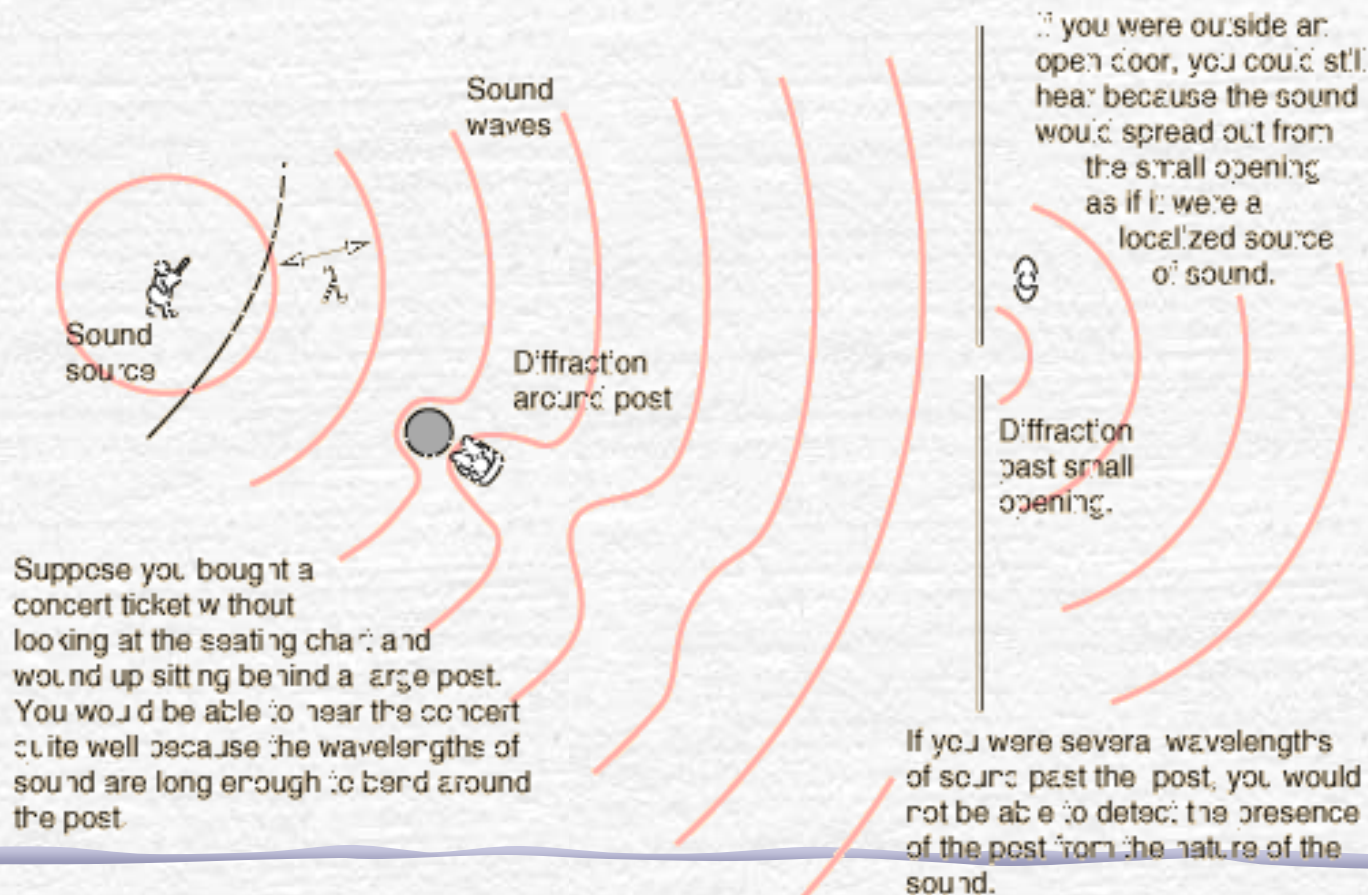
# Difração

- Em meados do século **XVII** foi publicado um trabalho, de autoria de **Francesco Grimaldi** descrevendo o fenômeno que o autor chamou de "**Diffractio**". Esse fenômeno era a propagação não retilínea da luz, que é percebido a olho nu, sob determinadas circunstâncias.



# O que é Difração

- Como um espectador, atrás de uma porta, por exemplo, é capaz de ouvir um som mas não é capaz de enxergar a pessoa falando?



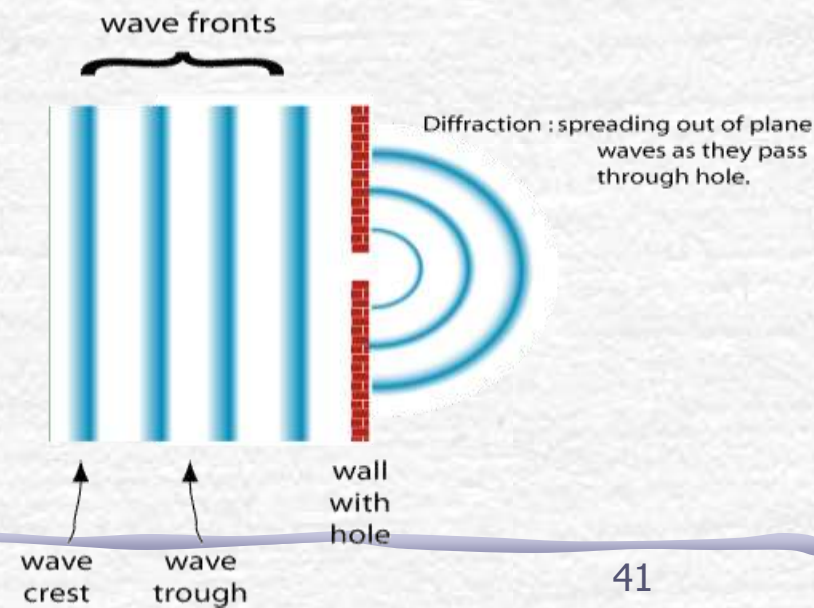


# Difração

- Fenômeno comum com todos os tipos de ondas
- Desvio sofrido por uma onda ao se deparar com um obstáculo de dimensões similares ao comprimento de onda.
  - A onda se espalha em torno desse objeto como se o mesmo fosse uma nova fonte de emissão da onda
  - Se a dimensão do objeto for muito maior (ou menor) que o comprimento de onda, não ocorre difração.

- Pode ocorrer em ondas:

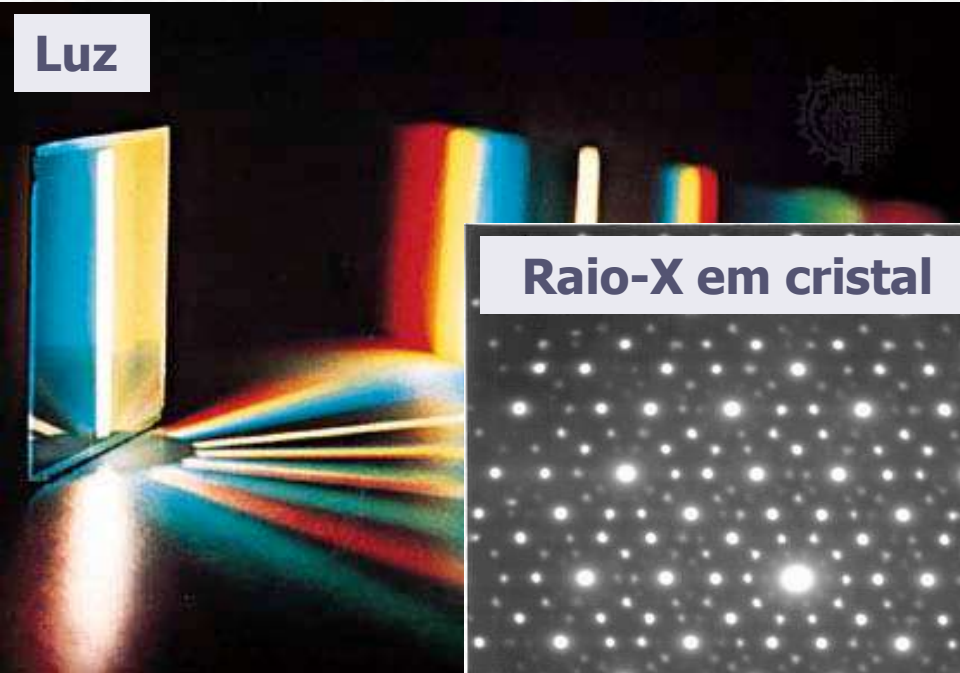
- Mecânicas
  - Sonoras
  - Oceano, etc...
- Eletromagnéticas
  - Luz
  - Raios-X, etc...



# Exemplos

Difração de elétrons em estruturas microscópicas

Luz

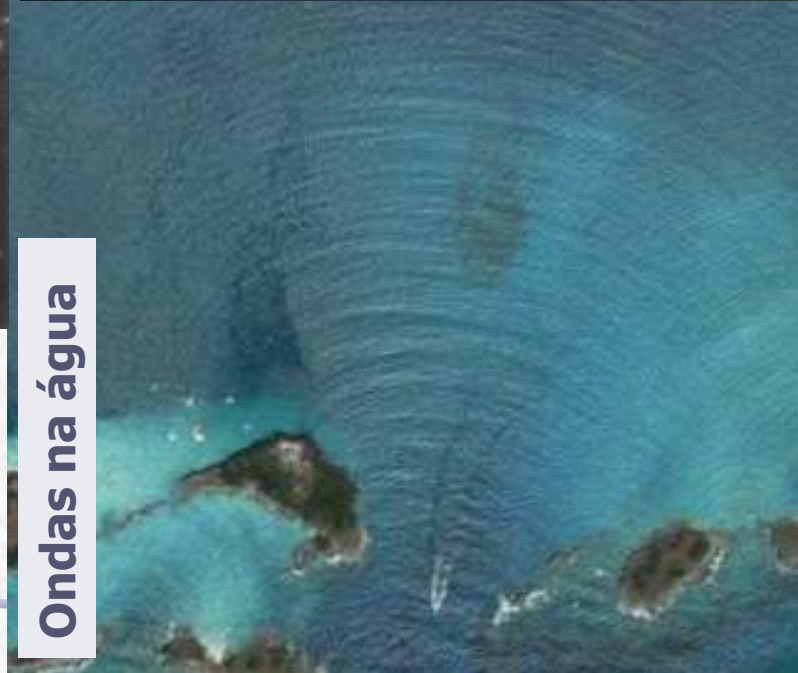


Raio-X em cristal



Luz do sol

Ondas na água



# Difração

- Ondas de comprimento muito menor que as dimensões do obstáculo sofrem pouca difração
  - <http://sampa.if.usp.br/~suaide/applets/falstad/mirror1/ripple/>

Para mais detalhes da parte teórica veja o capítulo 10 do livro **Optics** de **E. Hecht** e a apostila de difração do curso de 2007 na página do Labflex.

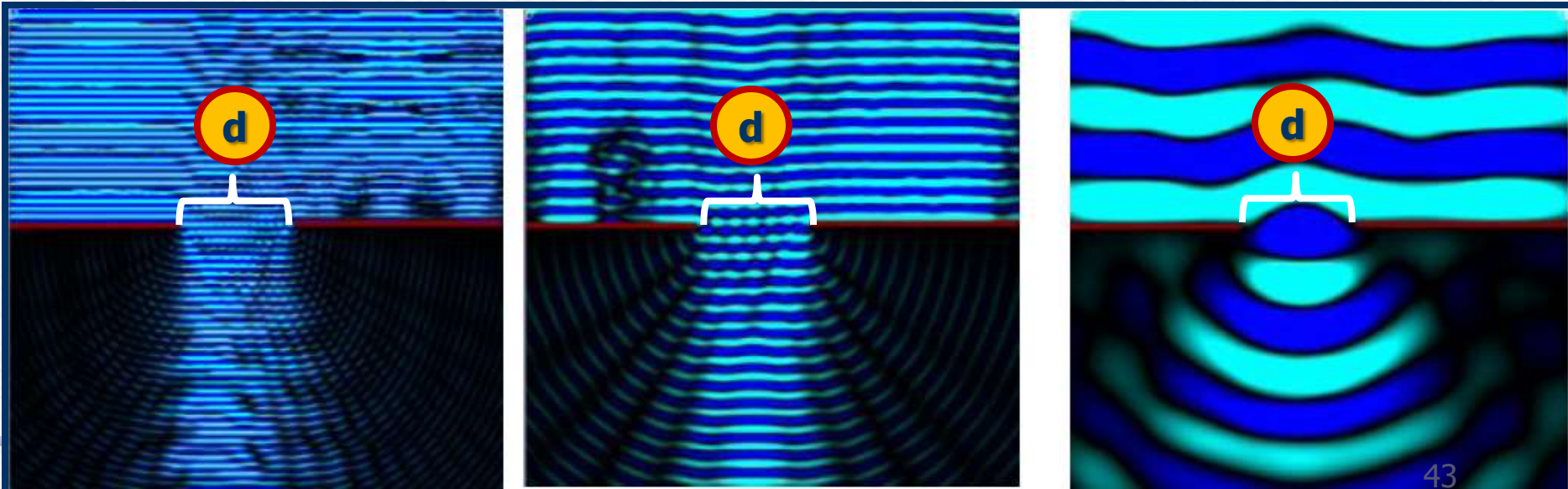
$\lambda_1$

$\ll$

$\lambda_2$

$\ll$

$\lambda_3$

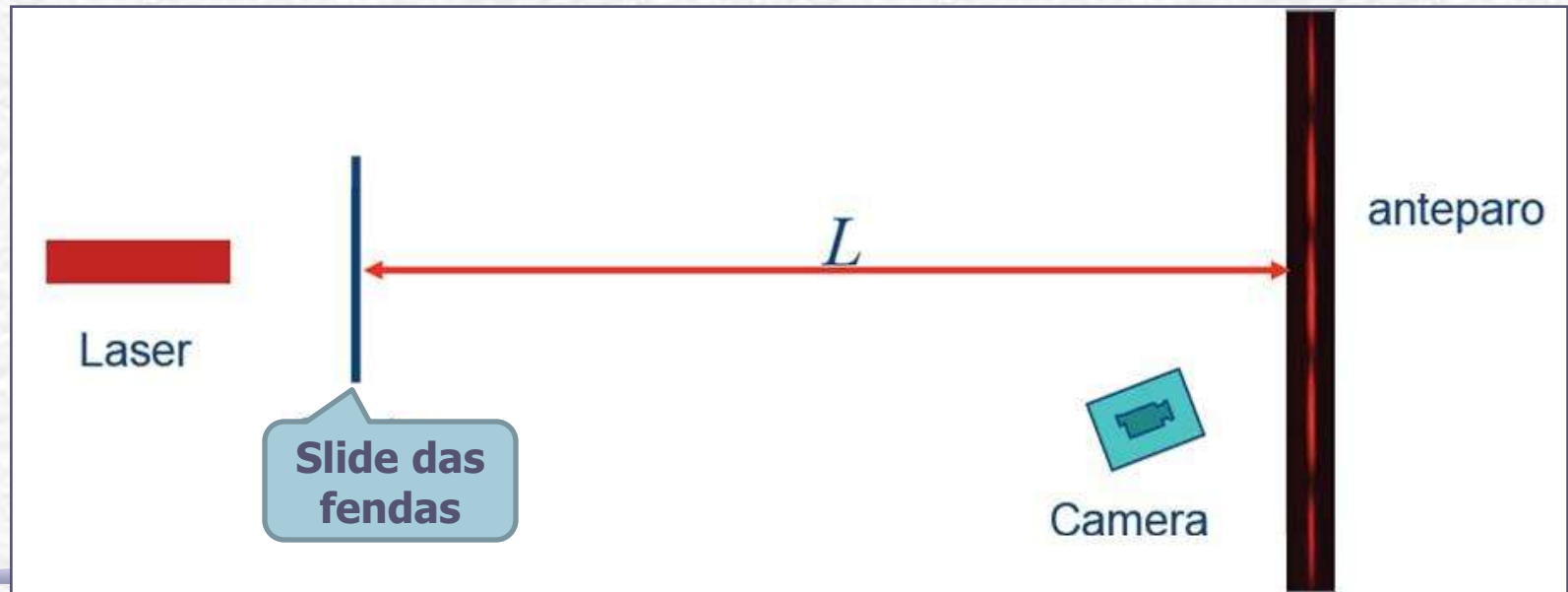


# Para esta Semana: Parte 2

- Fotografe figuras de difração para os seguintes objetos:
  - fendas simples (pelo menos duas fendas)
  - fenda dupla (pelo menos duas fendas)
  - fio de cabelo
  - todos os objetos na linha superior do slide de fendas
- Discuta os resultados obtidos.
  - Para as fendas simples e duplas tente relacionar as figuras observadas com as dimensões dos objetos.
  - Tente identificar a forma geométrica dos objetos na linha superior do slide de fendas a partir das figuras de difração observadas. Discuta.

# Medidas de Difração

- Montar no trilho (usado para as medidas com lentes): o laser, o slide de fendas e o anteparo.
- Cuidado com o alinhamento
- Escolha a melhor situação possível para observar as figuras desejadas
- Fotografe todas as suas figuras observadas



# Dicas para a montagem

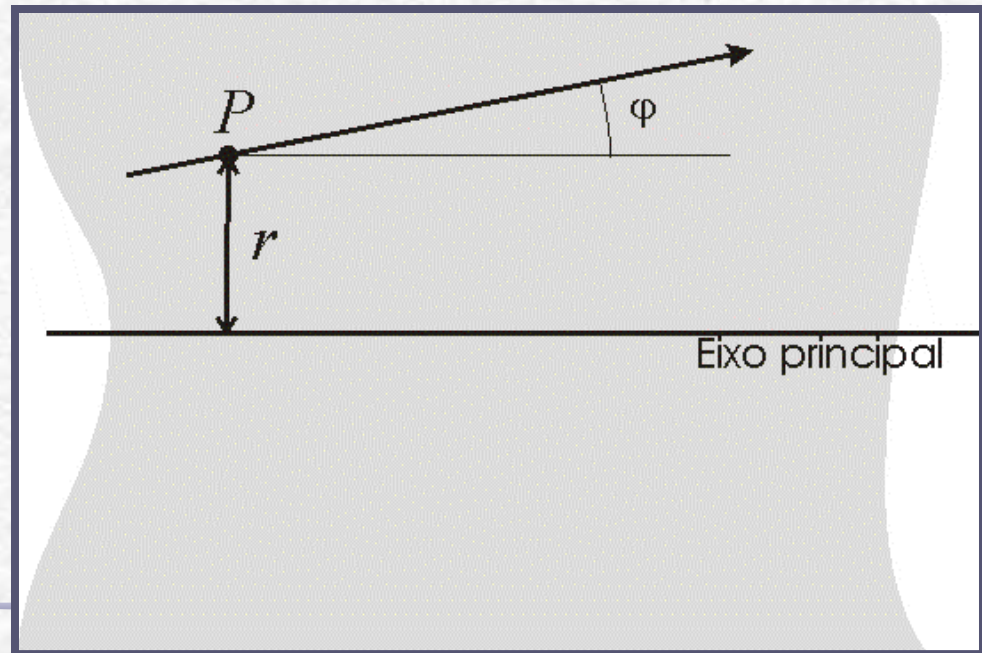
- **Dicas:**

1. **O alinhamento do laser com a fenda é fundamental para uma boa figura de difração.**
2. Você deve relacionar cada figura de difração com o objeto difrator – cuidado para não fazer confusão.
3. Há papel preto ou branco que pode ser preso ao anteparo, veja qual produz a melhor foto, o comprimento de onda da luz desse laser é **628nm** (vermelho).
4. As câmeras disponíveis no laboratório são as câmeras CCD, se quiser pode trazer uma máquina fotográfica melhor.
5. Por favor não coloque o dedo sobre as fendas do slide, (elas não estão protegidas) segure-o pelas bordas.

# Método Matricial: **REVISÃO**

- Seja um raio luminoso **R** em um meio óptico qualquer. Podemos caracterizar, em qualquer ponto **P**, este raio luminoso pela distância ao eixo óptico principal e o ângulo que ele faz com esse eixo.

$$P = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$$



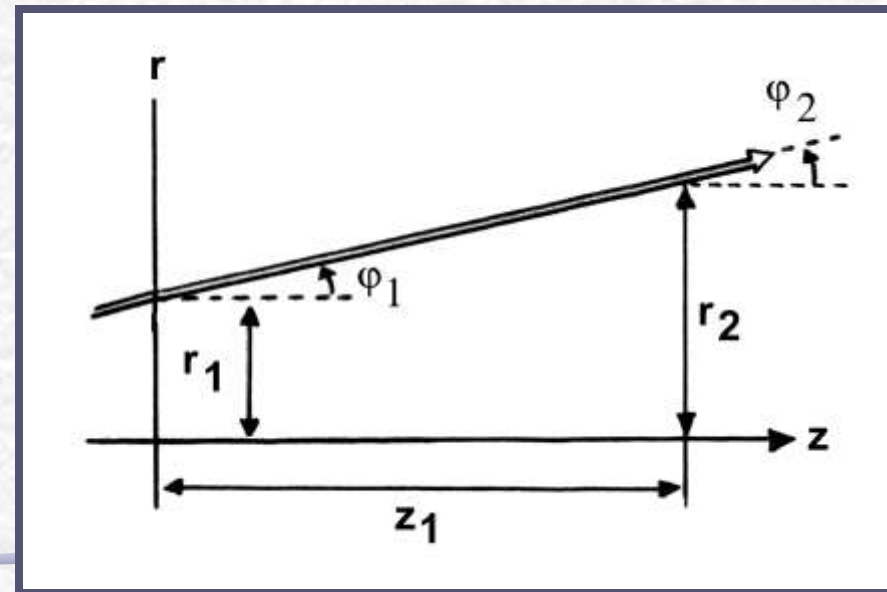
# Método Matricial

- O método matricial estabelece uma transformação entre de um ponto  $P_1$  para outro ponto  $P_2$  de um meio através de uma matriz de transformação  $M$

$$P_1 = \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = MP_1$$





# Tratamento Matricial

- Assim, a transformação de um ponto  $P_1$  para outro ponto  $P_2$  em um meio pode ser escrita como:

$$P_2 = MP_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} P_1$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_2 &= Ar_1 + B\varphi_1 \\ \varphi_2 &= Cr_1 + D\varphi_1 \end{aligned}$$

# Lentes : tratamento matricial

- Devido à reversibilidade dos raios luminosos, as matrizes de transformação tem que ser reversível. A transformação inversa é feita através do inverso da matriz de transformação, ou seja:

$$P_1 = M^{-1} P_2$$

- O teorema de Liouville diz que a área de um feixe luminoso é conservada no espaço de fase, portanto:

$$\det(M) = \det(M^{-1}) = 1$$

# Vários meios diferentes

- ▣ A vantagem do método matricial é poder escrever a propagação de um raio luminoso por matrizes independentes para cada meio envolvido e combiná-las.
- ▣ Seja, por exemplo, uma propagação do ponto  $\mathbf{P}_1$  para  $\mathbf{P}_2$  que passa por vários meios distintos. A transformação, neste caso, é:

$$P_2 = M_n M_{n-1} \cdots M_2 M_1 P_1$$

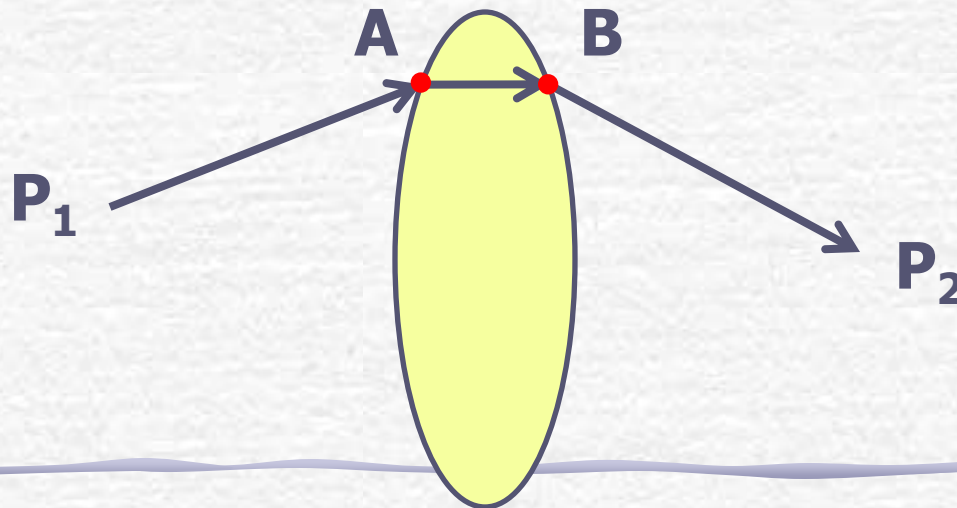
# Exemplo: Lente Simples

- Do ponto  $P_1$  para  $P_2$  temos que:

$$P_2 = M_{P_1 \rightarrow P_2} P_1$$

- A matriz é a composição de três transformações diferentes:

$$M_{P_1 \rightarrow P_2} = M_{B \rightarrow P_2} \cdot M_{A \rightarrow B} \cdot M_{P_1 \rightarrow A}$$



# Exemplo: Lente Simples

- De  $P_1$  para  $A$ , propagação em linha reta

$$\varphi_2 = \varphi_1$$

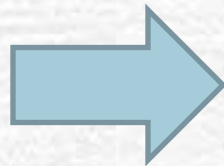
$$r_2 = r_1 + d \tan \varphi_1$$

- Aprox. paraxial:

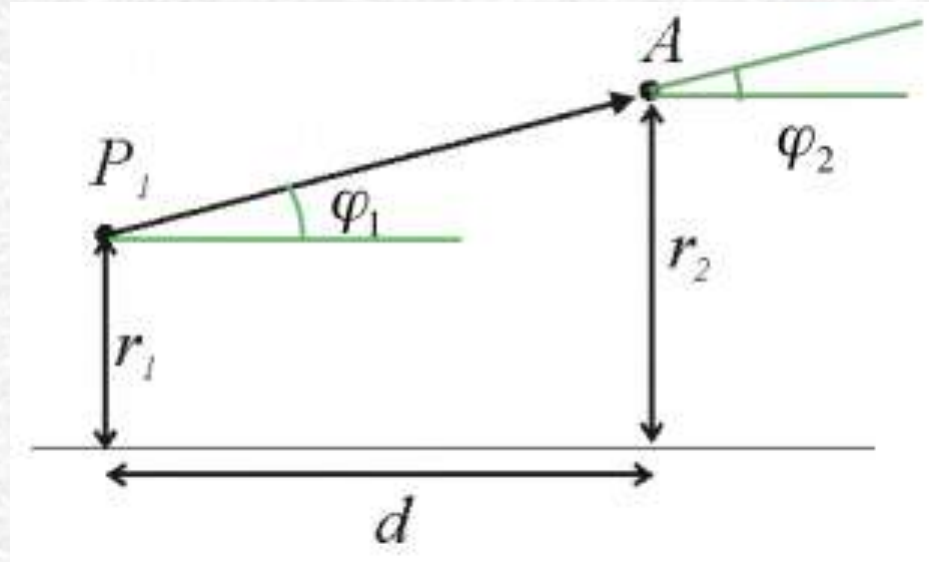
$$\operatorname{tg} \varphi_1 \approx \operatorname{sen} \varphi_1 \approx \varphi_1$$

- Portanto:

$$r_2 = r_1 + d \cdot \varphi_1$$



$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{P_1 \rightarrow A}} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$



# Exemplo: Lente Simples

- De A para B, propagação dentro da lente
- Aprox. lentes delgadas:

$$A \equiv B \text{ e } r_2 \approx r_1$$

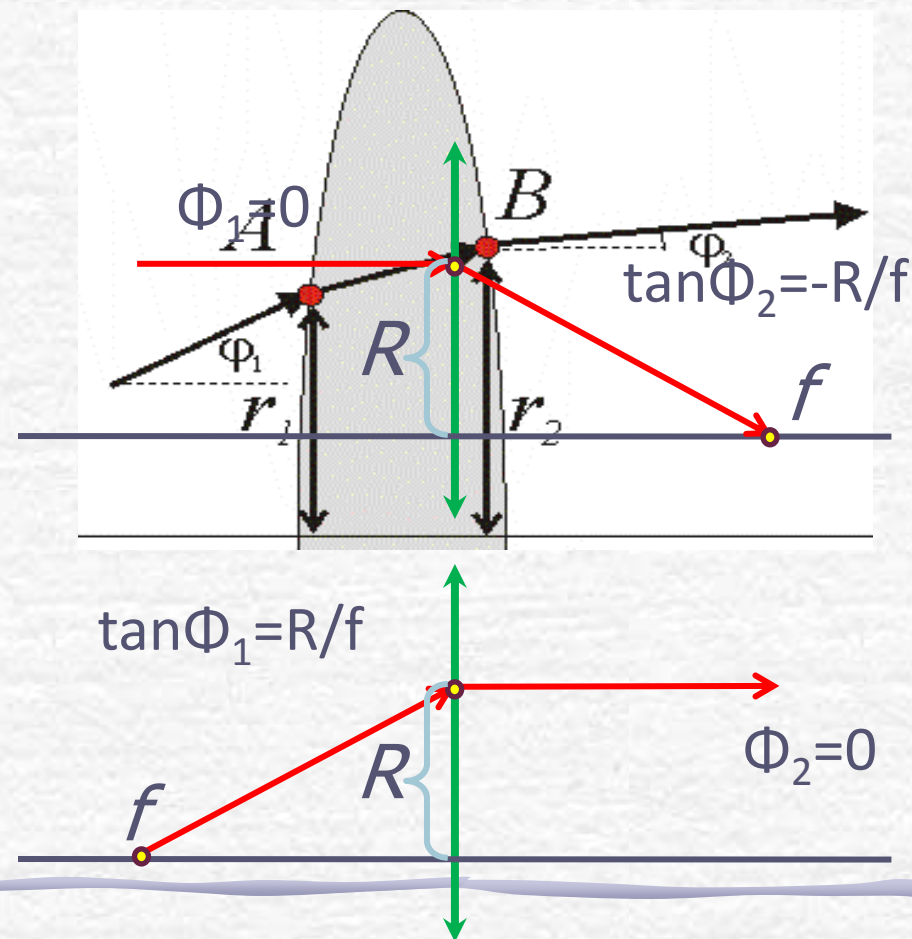
- Além disso temos que:

$$\varphi_1 = R/f \Rightarrow \varphi_2 = 0$$

$$\varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = -R/f$$

- Dedução na apostila:

$$M_{A \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$



# Exemplo: Lente Simples

- Assim, a transformação completa para uma lente simples, delgada vale

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

Transformação do ponto de saída da lente (B) até o ponto imagem (i)

Transformação entre os pontos dentro da lente

Transformação do ponto objeto (o) até a lente (A)

# Exemplo: Lente Simples

- Para a lente delgada a transformação completa fica

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{i}{f} & o - \frac{io}{f} + i \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{o}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

- Ou seja:

$$r_2 = \left(1 - \frac{i}{f}\right) r_1 + \left(o - \frac{io}{f} + i\right) \varphi_1$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{f} r_1 + \left(1 - \frac{o}{f}\right) \varphi_1$$

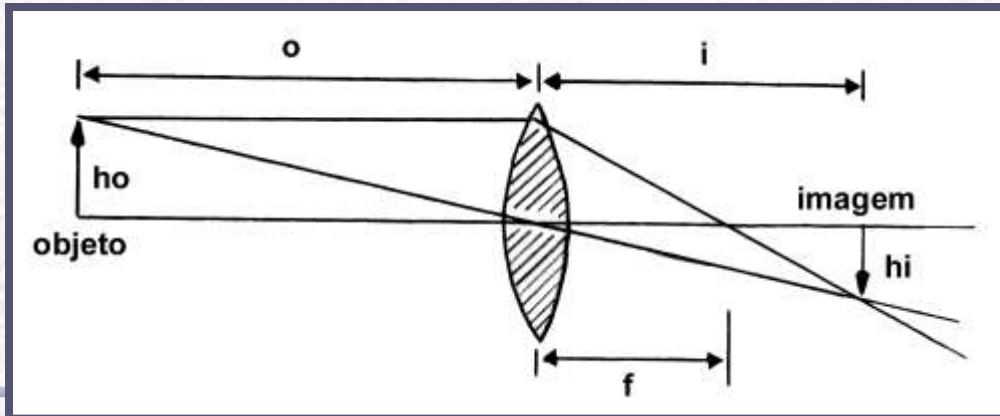


# Equação da lente delgada

$$r_2 = \left(1 - \frac{i}{f}\right)r_1 + \left(o - \frac{io}{f} + i\right)\varphi_1$$

- Mas todos os raios saindo de  $r_1$  chegam no mesmo ponto  $r_2$  independente de  $\varphi_1$ , portanto o 2º termo deve ser nulo:

$$o - \frac{io}{f} + i = 0 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$$

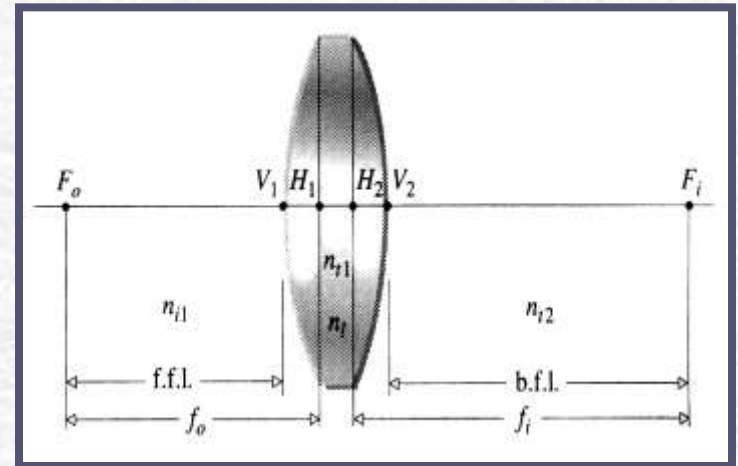


**Equação de Gauss para lentes delgadas**

# Lente espessa: tratamento matricial

- Para a lente espessa a matriz de propagação é mais complicada, porém pode ser demonstrada (ver apostila) e vale:

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{tP_1}{n} & \frac{t}{n} \\ \frac{tP_1P_2}{n} - P_1 - P_2 & 1 - \frac{tP_2}{n} \end{pmatrix}$$



- Onde  $t$  é a espessura da lente e a potência da superfície é:

$$P_i = \frac{n - 1}{R_i}$$

# Lente espessa: foco

- ▣ Uma fórmula que se obtém a partir dessa matriz de transformação é a **equação do fabricante**:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] + \frac{(n - 1)^2}{n} \left[ \frac{t}{R_1 R_2} \right]$$

- ▣ Se a lente for delgada, a espessura é desprezível, e o segundo termo vai a zero:

$$\frac{1}{f} \sim (n - 1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

e temos a **equação do fabricante para lentes delgadas**.

# Lente espessa

- A posição dos planos principais da lente espessa também sai da matriz de transformação e é

$$h_1 = \frac{t}{n \left( 1 + \frac{P_1}{P_2} - t \frac{P_1}{n} \right)}$$

$$h_2 = \frac{t}{n \left( 1 + \frac{P_2}{P_1} - t \frac{P_2}{n} \right)}$$

