Física Experimental IV – FAP214

Notas de aula: www.fap.if.usp.br/~hbarbosa

LabFlex: www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex

Aula 4 Experiência 1
Circuitos CA e Caos

Prof. Henrique Barbosa

hbarbosa@if.usp.br

Ramal: 6647

Ed. Basílio Jafet, sala 100

TAREFAS SEMANA PASSADA

Para entregar

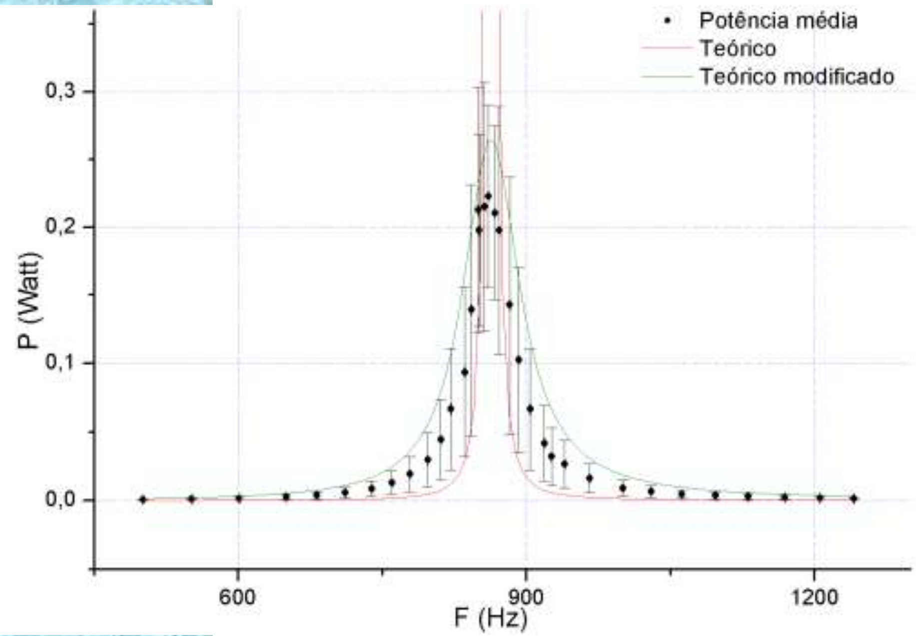
- Levantar a curva de ressonância de corrente do circuito **RLC**
  - Ajustar e Comparar com a curva teórica
    - O que usar? Ondas harmônicas simples ou quadrada + FFT ?
- Calcular a potência média dissipada por ciclo em função da freqüência
  - Obter o valor de Q e comparar com a previsão
- Na ressonância, medir V_L e V_C
  - Qual a diferença de fase entre as duas? Compare uma com a outra e ambas com a amplitude da tensão no gerador. Comente.

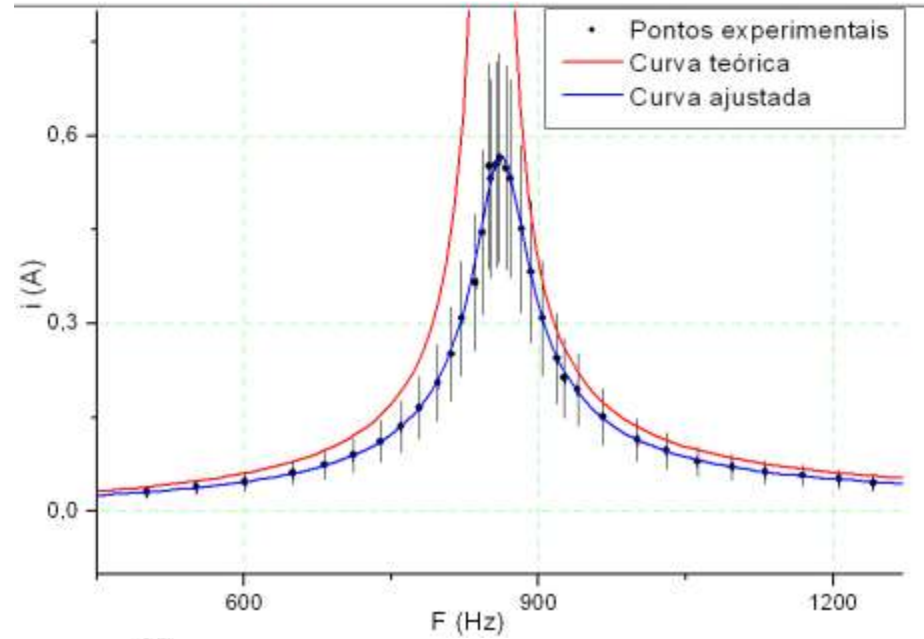
- Fazer isso para dois circuitos diferentes:

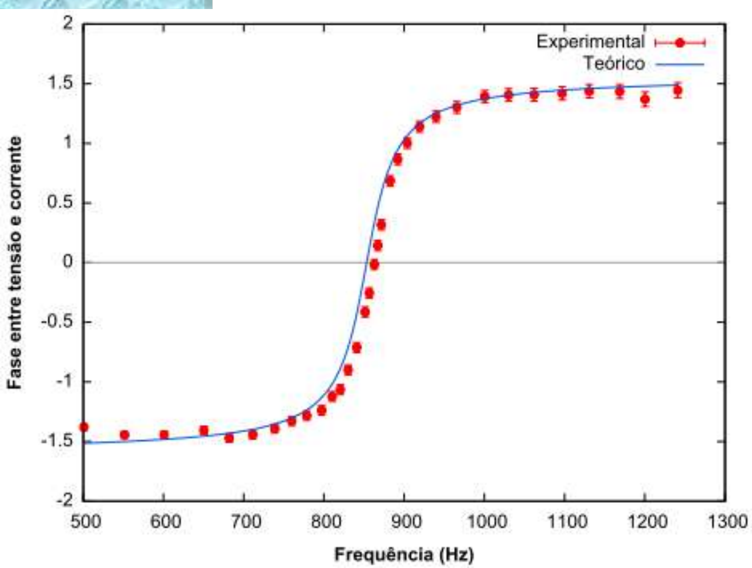
R_1=1Ω, **C=1μF** e **L=35mH**

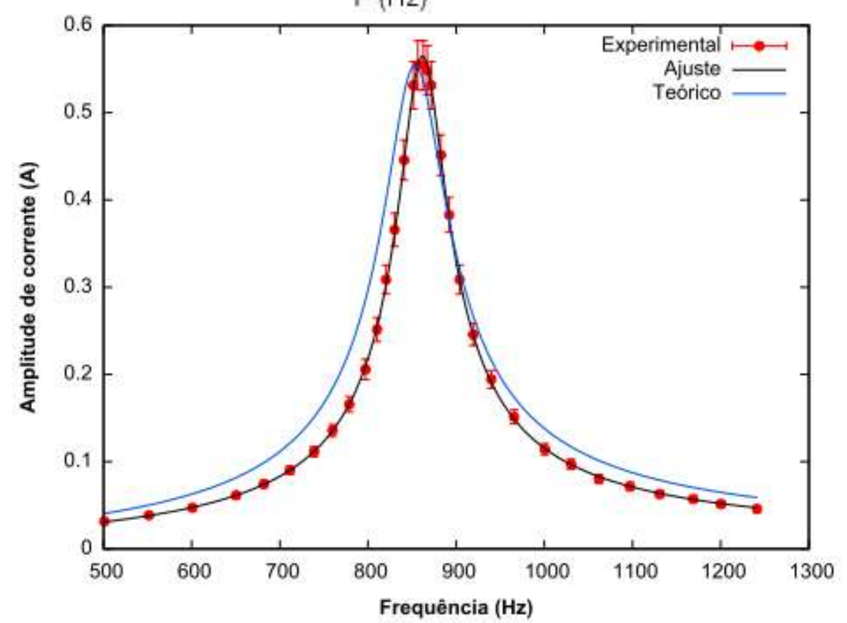
R_1=33Ω, **C=1μF** e **L=35mH**

Corrente x Freqüência

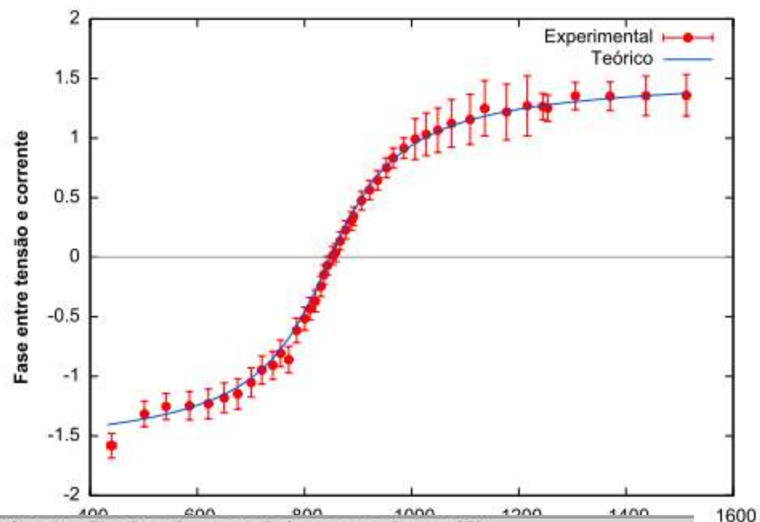


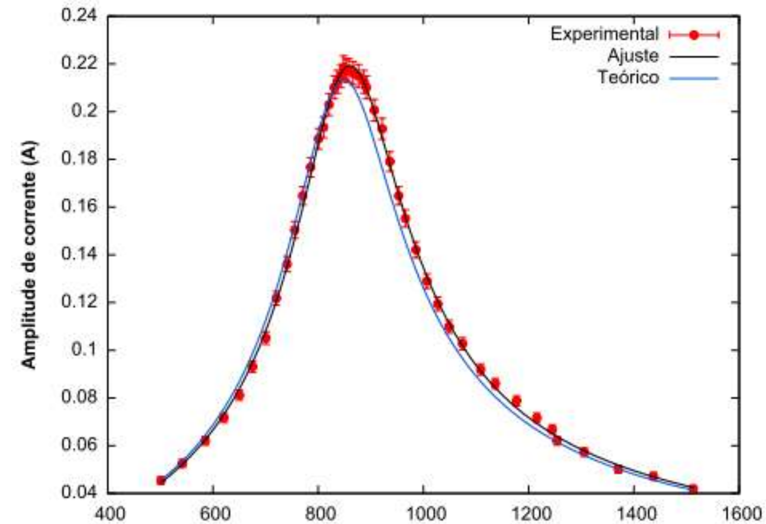


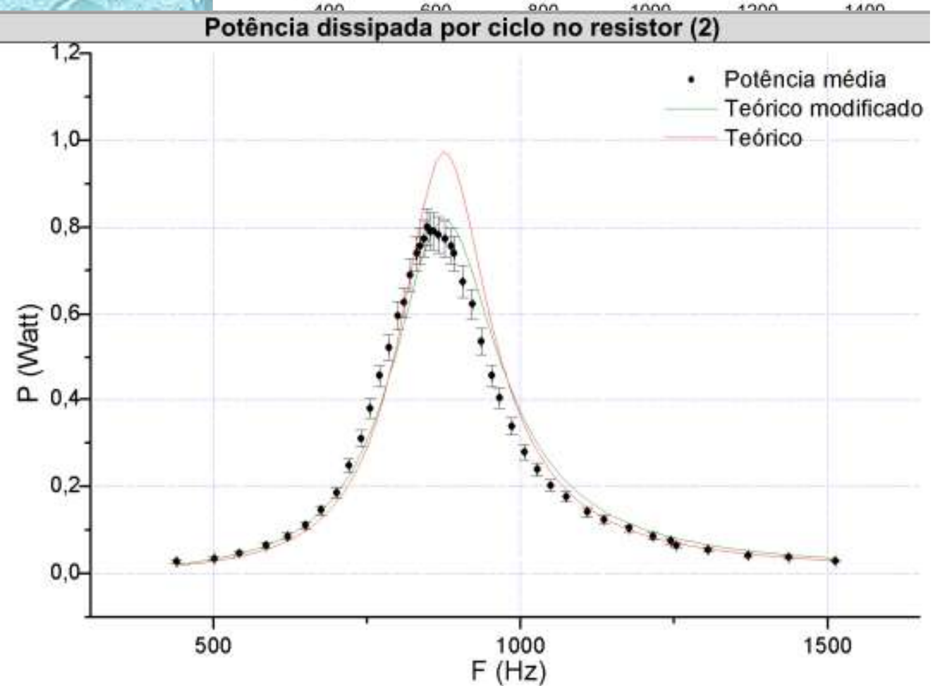


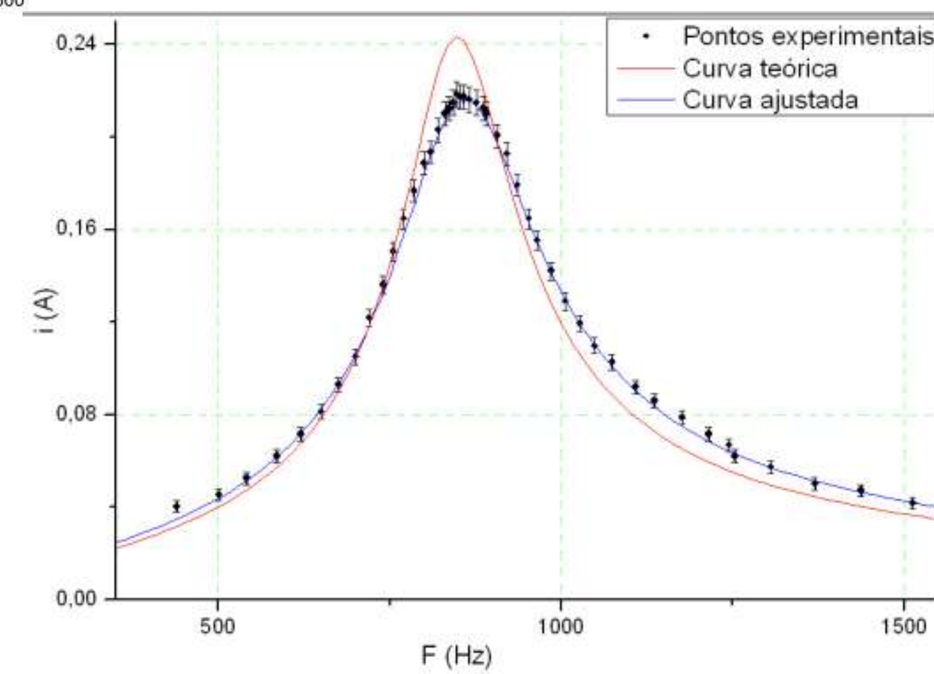


Com R=33 o “erro” é menor



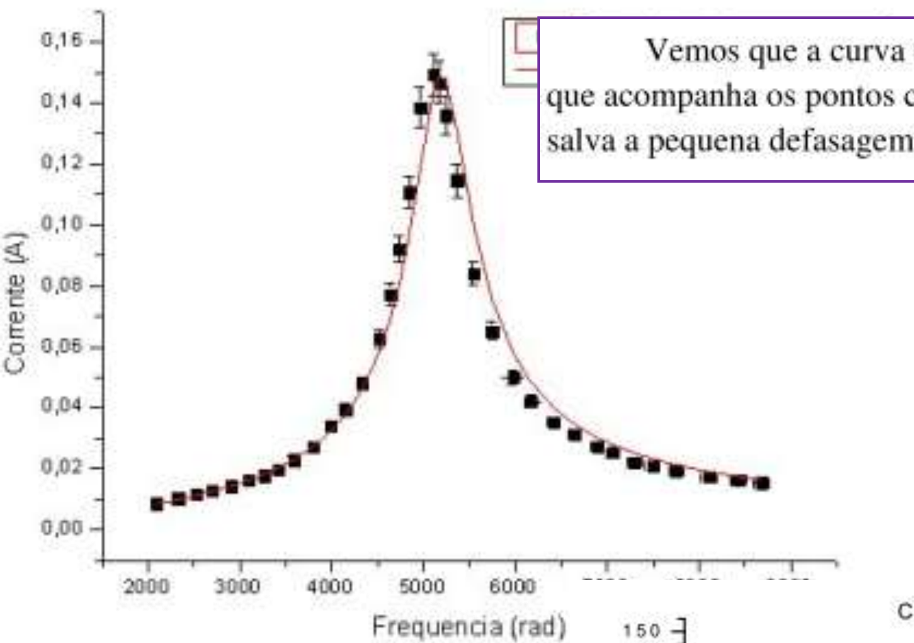




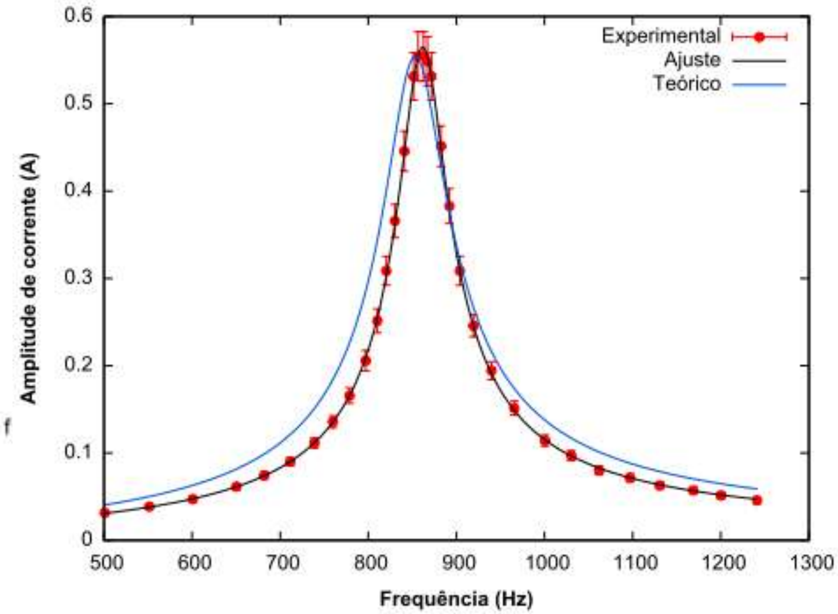


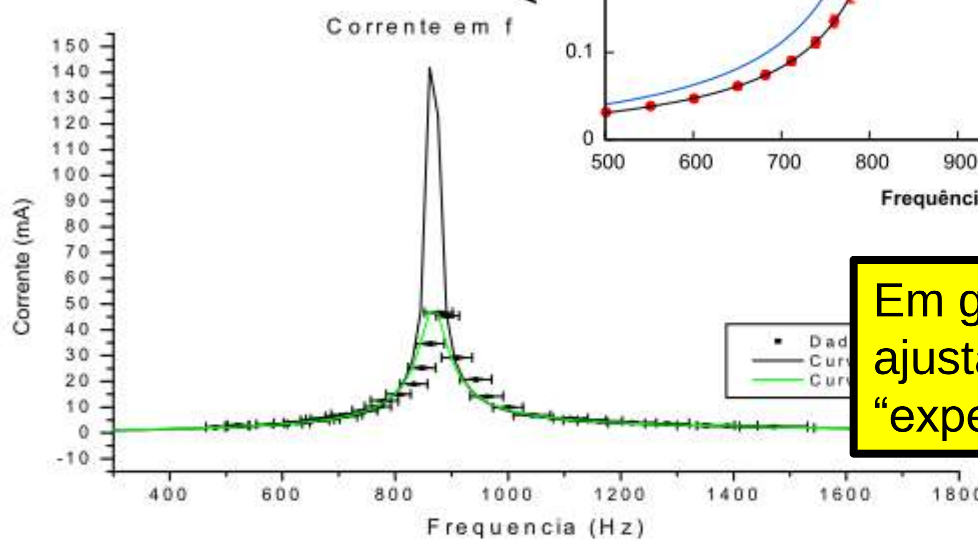
O máximo esta deslocado

O que esquecemos??



Vemos que a curva teórica desenhada (que não é proveniente de ajuste, é somente uma linha que acompanha os pontos calculados) acompanha quase que perfeitamente os dados experimentais, salva a pequena defasagem que pôde ser causada por possiveis ruídos.

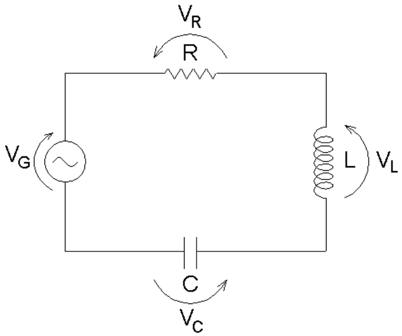




Um ruído poderia causar esse deslocamento entre as curvas?

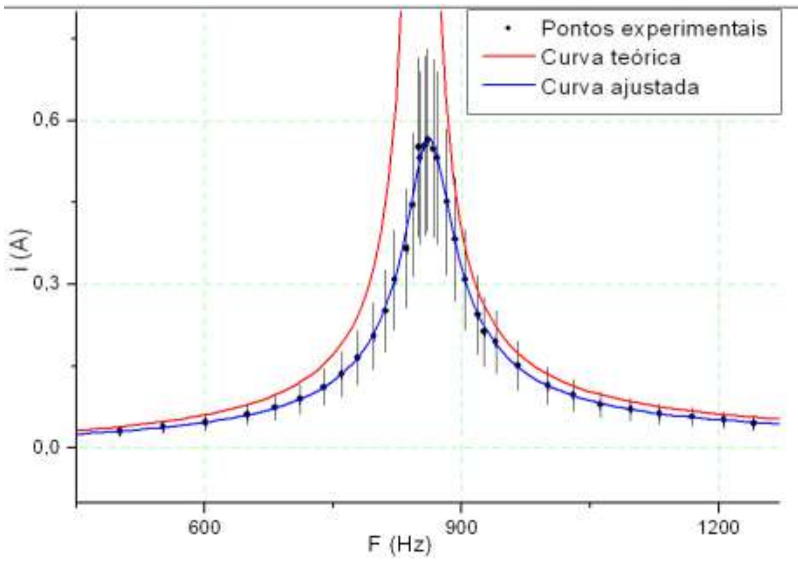
Em geral tentaram ajustar uma curva “experimental”

Revendo tudo



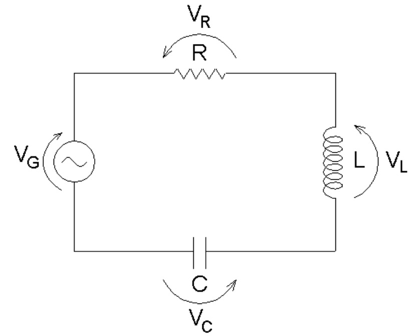
- Os dados não batem com a teoria, mas é possível ajustar uma curva, como a teórica, aos dados!
- Voltando a teoria. Qual a expressão para a corrente?

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

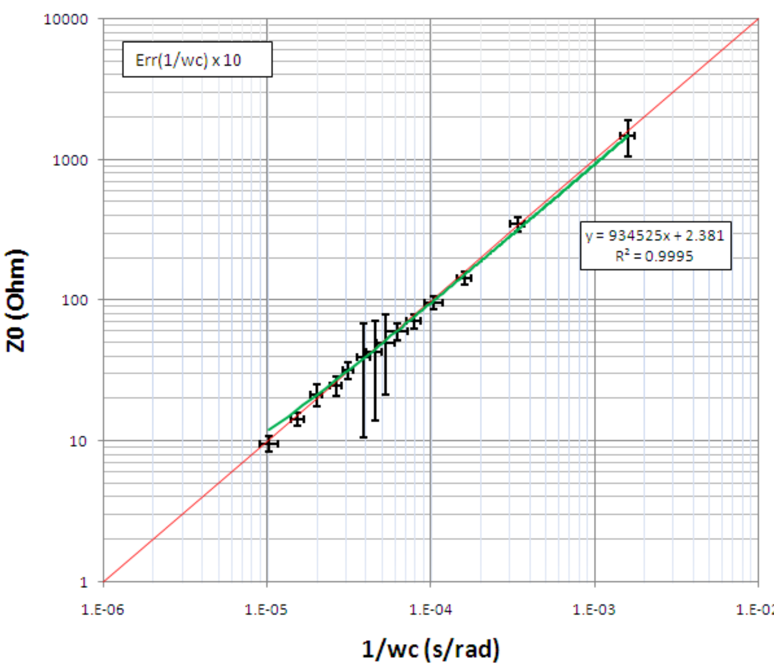


- Duas opções:
  - Ou a física esta incompleta e a expressão está errada
  - Ou não entendemos nosso circuito como pensávamos

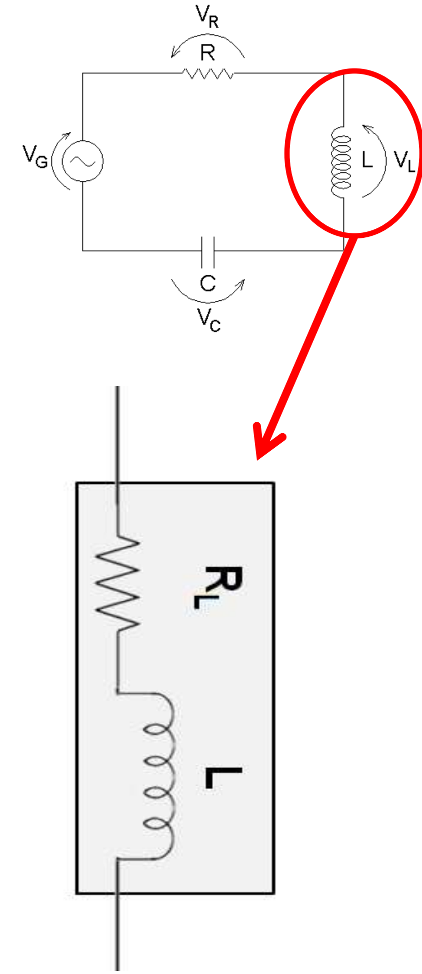
Revendo tudo



- Vamos supor, inicialmente, que entendemos a Física mas não compreendemos o circuito.
- A resistência vale, de fato, 1 Ω?
  - Medimos com o Ohmímetro
- O capacitor é ideal?
  - Estudamos na primeira semana e, dentro das incertezas experimentais podemos considerá-lo assim.



Revendo tudo



- O indutor é ideal?
  - Não! A bobina é, na verdade um fio enrolado e tem resistência não nula
- Na equação R é a resistência total

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad R_T = R + R_L + \cdots$$

- Existem outras resistências no sistema?

Mudaria a amplitude do máximo

- E a indutância? Será que o valor nominal é confiável?

Mudaria a posição do máximo

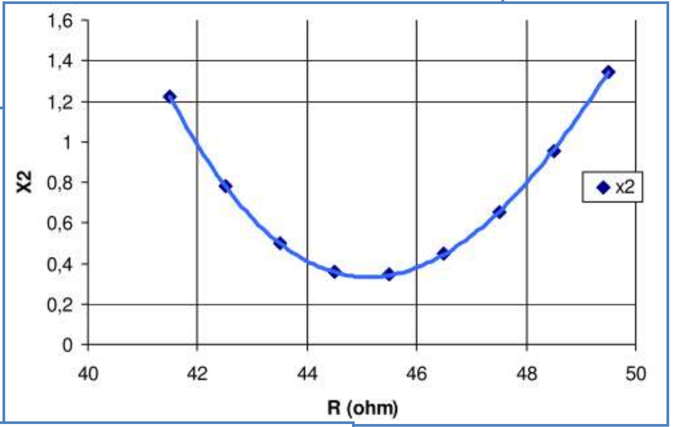
Alguns Incluíram $R_{gerador}+R_L$

Em uma primeira análise consideramos apenas o valor da resistência do resistor, e a curva teórica ficou defasada em relação ao experimental, principalmente quando utilizamos o resistor de $(1,00 \pm 0,05)\ \Omega$, assim temos que o resistor não era o único elemento resistivo do circuito, já que existe um indutor e um gerador que contribuem para a resistividade do circuito com isso o valor de R da equação 1 e dado por:

$$R = R_{\Omega} + R_B + R_G$$

$R=1$, $R_L=8.8$, $R_{total}=12.1 \rightarrow R_g=2.3$

$R=32.4$, $R_L=8.8$, $R_{total}=44 \rightarrow R_g=2.8$



Escolhemos o método do cálculo dos mínimos quadrados para obter o valor do R juntamente com sua incerteza.

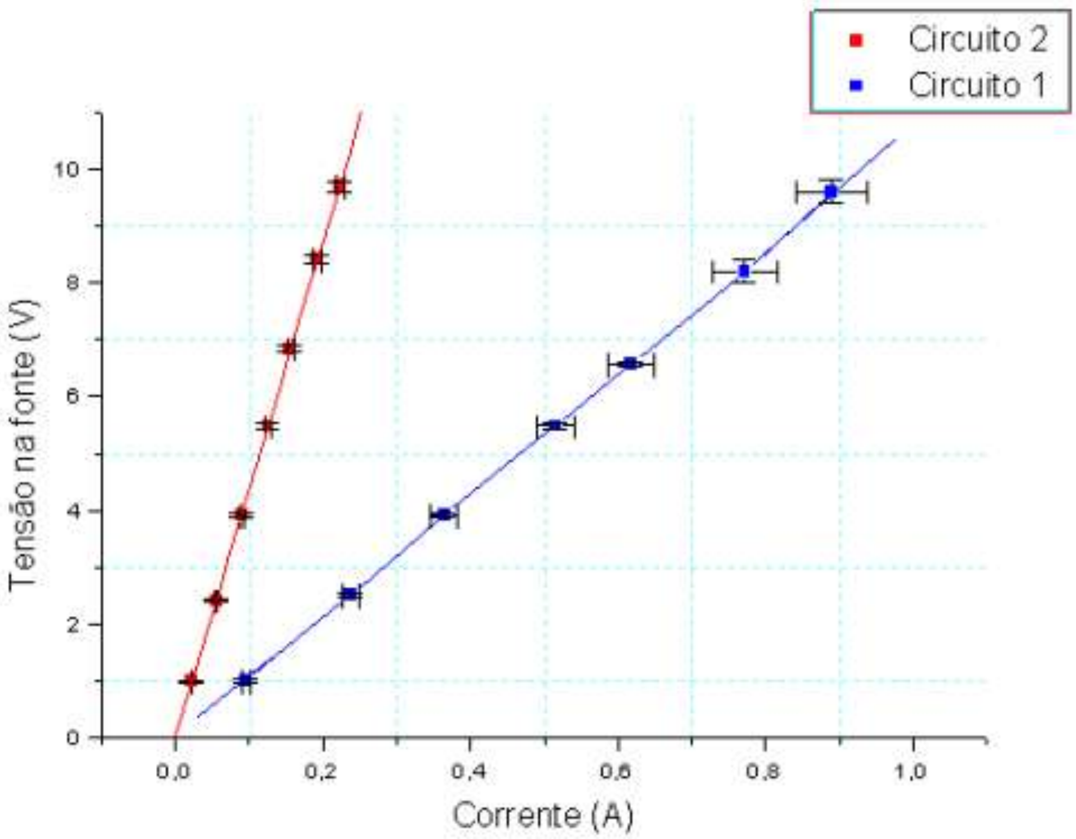
Para isso seguimos as sugestões das notas de aula dos anos anteriores:

Outra opção para R_T

- Fixaram $\omega = \omega_0$ e mediram a tensão no gerador em função da corrente para determinar com maior precisão Rtotal.

$$R_{ef1} = 10{,}66(5)\Omega$$

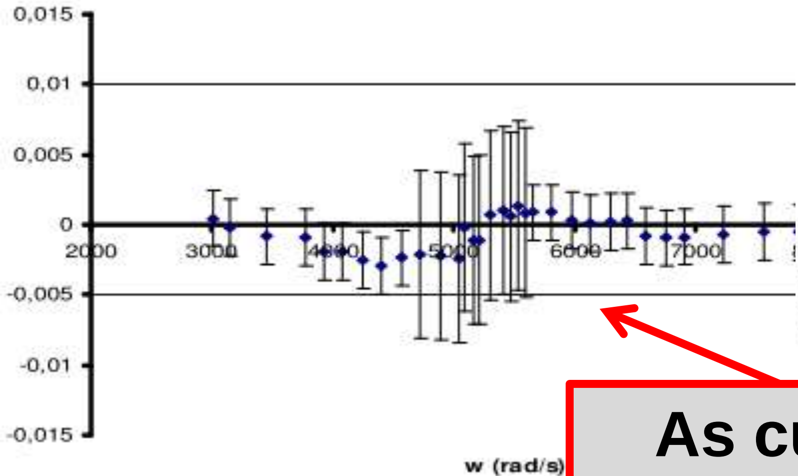
$$R_{ef2} = 43{,}4(1)\Omega$$

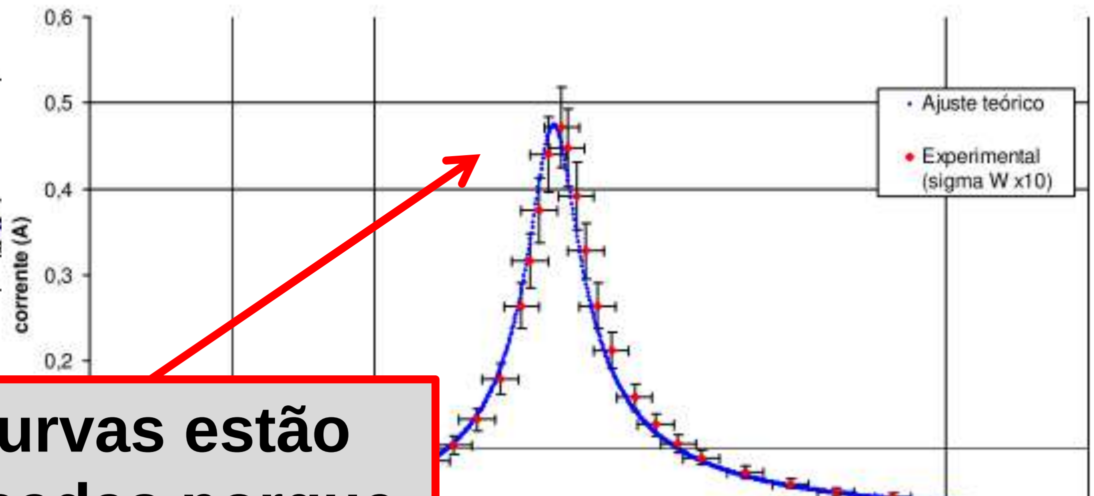


Boa precisão no ajuste... Mas qual é a tensão na fonte?

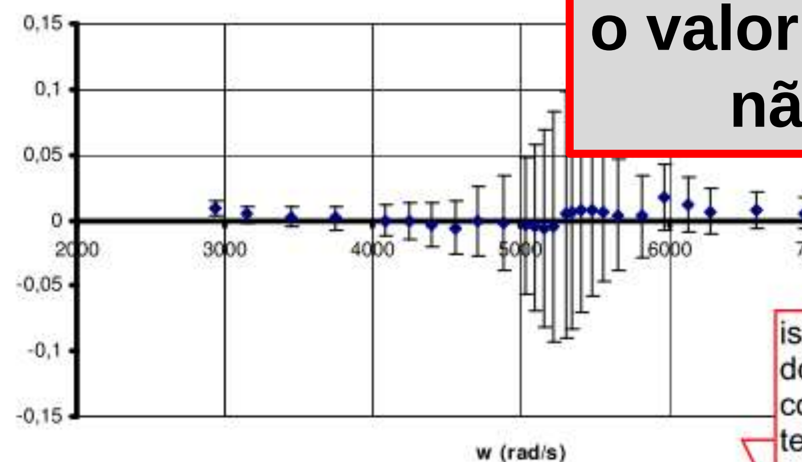
Vamos discutir adiante.

Ajustando R_T o resultado fica “bom”... E se ajustar ω_0 também ?

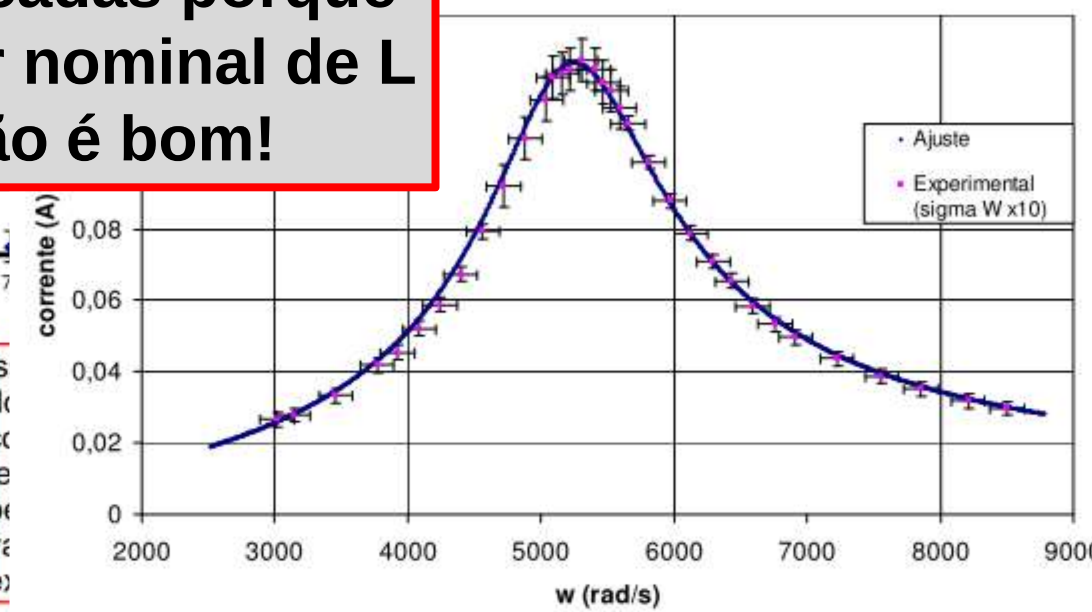




As curvas estão deslocadas porque o valor nominal de L não é bom!



igura 03: Resíduo absoluto do ajuste do gráfico da figura 2.



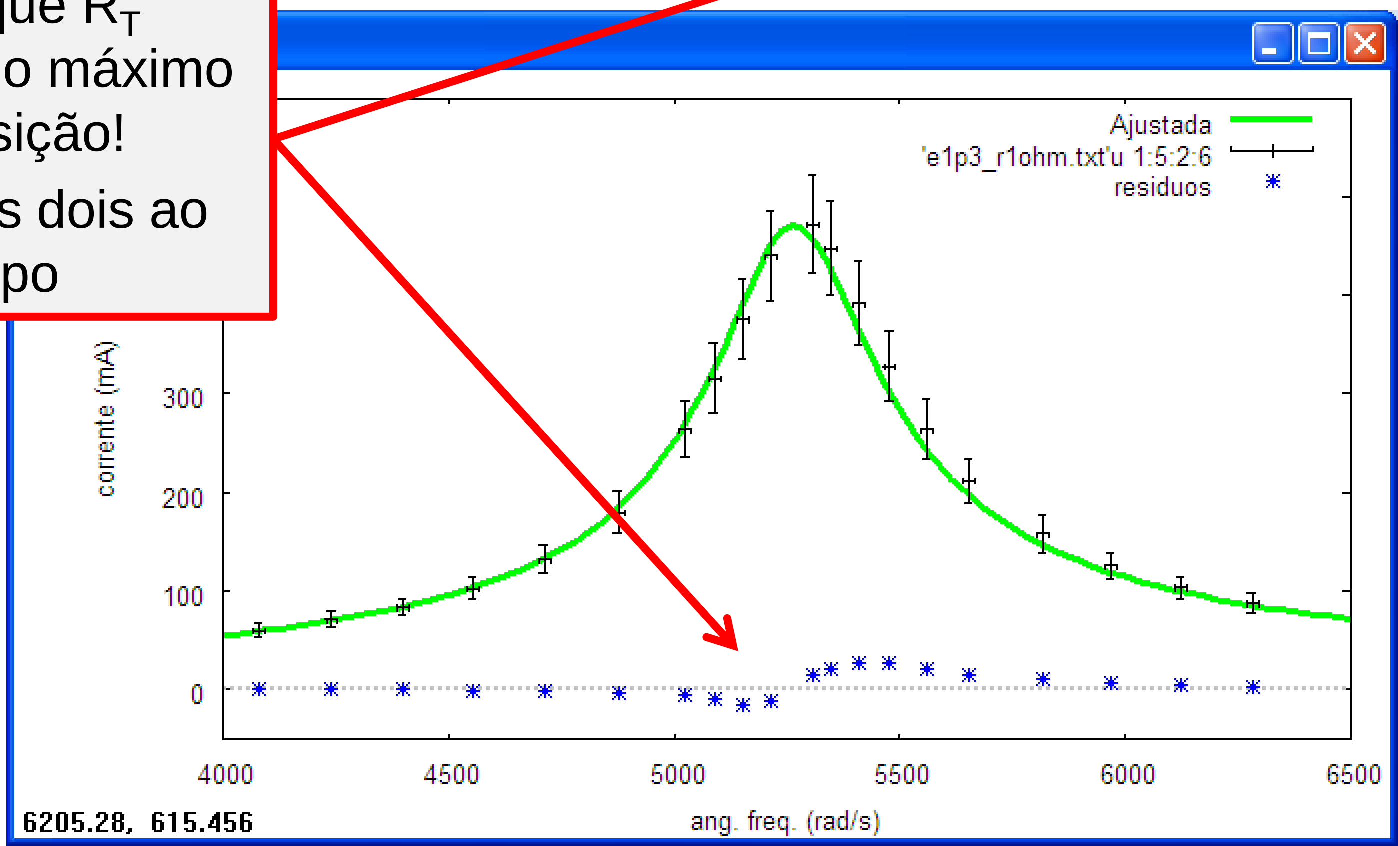
Revendo o Ajuste da curva Teórica

- Usando apenas R=resistor
- Usando $R_T = R + R_L$
- Obtendo $R_T = R + R_L + R_G$ (ajuste)

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

O problema é que R_T determina o valor do máximo e LC a sua posição!

Tem que ajustar os dois ao mesmo tempo



Ajustando R_T e ω_0

- Apenas R, L fixo em 35(3)μF:
  - R=12.10(50) Ohm [grupo]
  - R=11.86 Ohm ± 2.25% com X^2red=337.0
- R e L ao mesmo tempo
  - R=11.90 Ohm ± 0.6% com X^2red=23.3
  - L=34.74 ± 0.07% μF

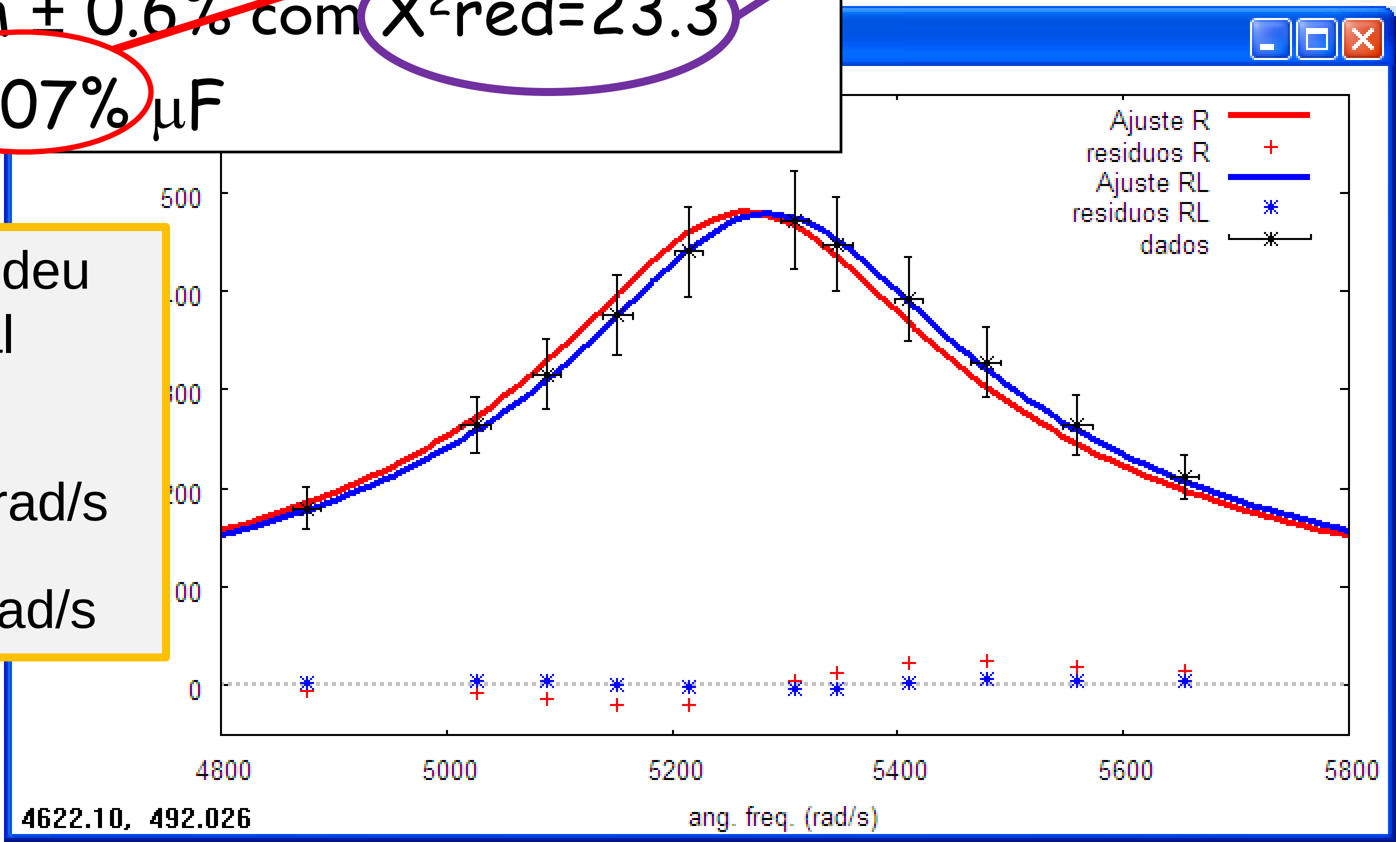
Melhor precisão medindo pela ressonância!

Melhor ajuste

Neste caso o grupo deu sorte, pois L nominal estava ok:

ω_{nom}=5267 ± 8.8% rad/s

ω_{exp}=5286 ± 2.0% rad/s



Estimando a Resistência do Gerador

- Podia-se determinar a resistência total do circuito e se conhecia a resistência R e R_L... Então:

$$R_G = R_T - R - R_L$$

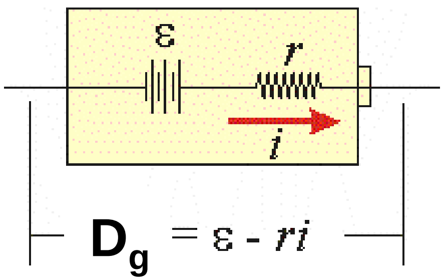
- Ninguém estimou o valor!
- Alguns grupos tinham todos os dados e eu consegui estimar.

Os valores estão entre -14 e +12ohm... O que está errado?

Rg (ohm)	
R=1ohm	**R=33ohm**
-2.01	-13.93
5.65	2
0	0
12.74	
2.27	2.77
0.7	0.7
4.91	2.31

Revendo a tensão do Gerador

- Como medir V_G?
  - **A maioria confundiu a tensão produzida pelo gerador com a ddp entre seus terminais (Dg)!**



O gerador não é ideal e tem uma resistência interna (lab3)

- Na nossa teoria, o que chamamos de V_G é na verdade ε!
  - **ε devia ficar fixo, mas Dg não, pois a corrente varia.**
  - Para determinar ε era preciso medir com o circuito "em aberto", ou seja com a corrente nula.
  - Isso podia ser feito com um multímetro (valor RMS) ou com o osciloscópio, mas não podia estar passando corrente pelo RLC.

Revendo as medidas de R_T

- A resistência total foi calculada dividindo Dg pela corrente na ressonância:

$$R_T = \frac{D_G^{\,ress}}{i^{ress}}$$

- Mas notem que, em um circuito não ideal, o que temos é:

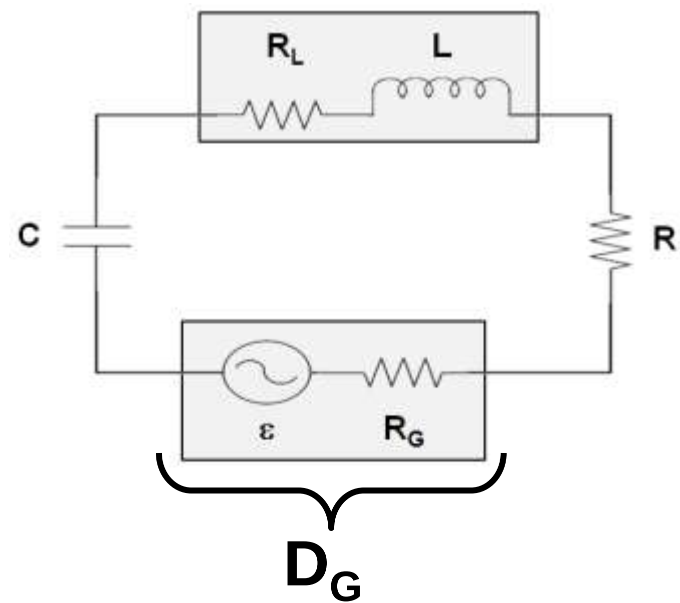
$$R + R_L = \frac{D_G^{\,ress}}{i^{ress}}$$

Vocês mediram $R+R_L$ achando que era R_T

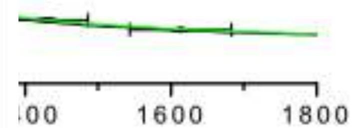
$$D_G^{\,ress} = \varepsilon - iR_G^{\,ress}$$

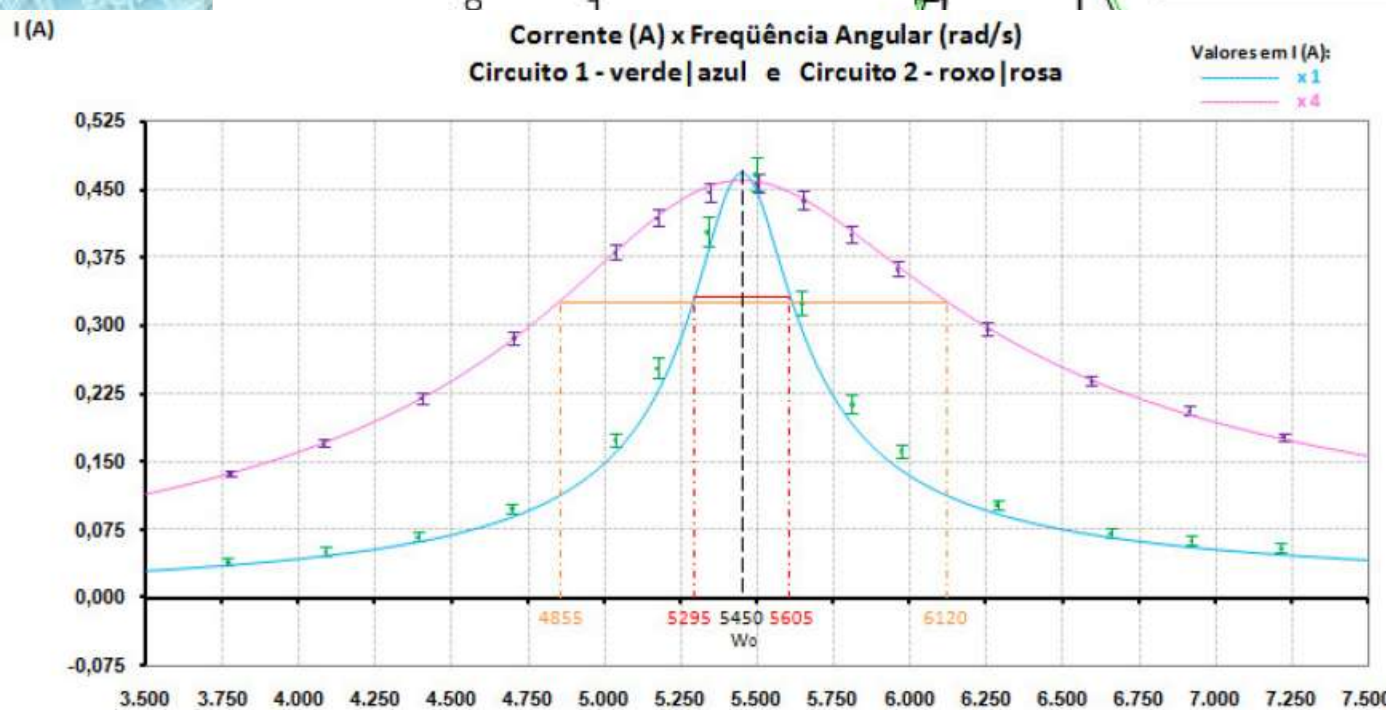
$$R + R_L + R_G = \frac{\varepsilon}{i^{ress}}$$

Era preciso ter medido ε para ter R_T.



O fator de Qualidade
Esse foi fácil e todos determinaram...





Diferença de Fase entre V_L e V_C

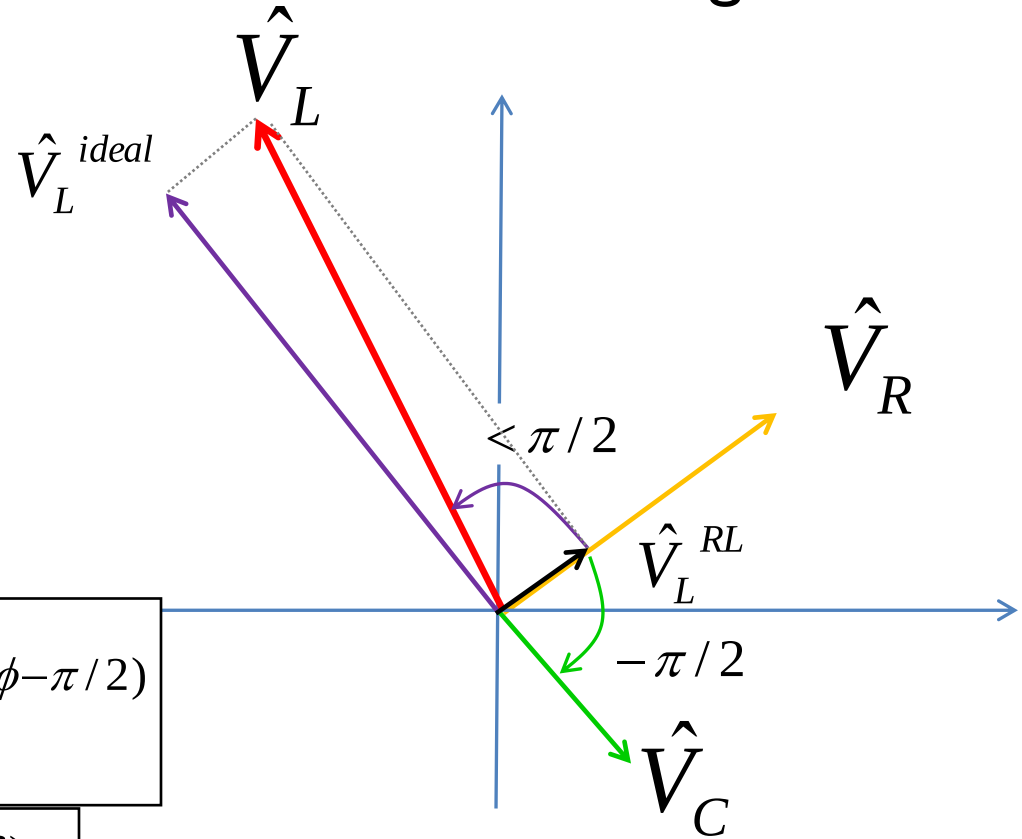
- Poucos entenderam o que estava acontecendo.
  - 4 mediram ~pi
  - 5 mediram ~0
- Mas qual deveria ser o valor esperado?
  - Se o indutor fosse ideal, seria π com está nas notas de aula.

vl	vc	fase
		1.00E-06
		1.00E-06
4.32	4.48	0.1
31.2	31	3.159
		3.03
4.6	3.7	0
24.8	24.8	~pi
157	149	3.189
77	77	pi

Para as duas resistências, foram medidas as diferenças de fase entre V_L e V_C. O valor obtido está na ordem de 10^{-6} rad, que pode ser considerada nula, permitindo concluir que V_L, V_C e V_G estão aproximadamente em fase no circuito para freqüência de ressonância.

Fasores e o Circuito RLC

- O indutor tem uma resistência, e agora?



$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

$$\hat{V}_L(t) = \omega L i_0 e^{j(\omega t - \phi + \delta)},$$

$$\text{onde } \delta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$\phi_{C-L} = \delta + \frac{\pi}{2} < \pi$$

$$V_L^{real} = i_0 \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} > i_0 \omega L = V_L^{ideal}$$

O Efeito do $R_{indutor}$

$$\hat{V}_L(t) = \omega L I e^{j\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\hat{V}_C(t) = \frac{I}{\omega C} e^{j\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

De onde se pode ver que a razão entre

$$\frac{\hat{V}_L(t)}{\hat{V}_C(t)} = \omega^2 LC e^{j(\pi)} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 e^{j(\pi)}$$

Tensões e fases no capacitor e no indutor na ressonância					
ω0	5405,4(25) rad/s	VL	157(4)V	ϕ	3,189(14) rad
		Vc	149(4) Ω		
ω0 (rad/s)	5330,6(31) rad/s	VL	35,5(9)V	ϕ	3,218(21) rad
		Vc	40,4(9) Ω		

Tabela 5: Valores de tensão no indutor e no capacitor e de fase entre os sinais. As incertezas são instrumentais.

Os valores de diferença de fase (ϕ) deveriam ser compatíveis com π, porém, não o são.

Se a resistência do indutor não for desprezível, a primeira das equações (1) não está correta, pois a tensão medida sobre o indutor será uma combinação de uma tensão sobre um resistor e de uma sobre o indutor ideal. Então:

$$\hat{V}_L^{real}(t) = \omega L I e^{j\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)} + RIe^{j(\omega t - \phi)} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, I e^{j(\omega t - \phi + \delta)}$$

Em que:

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

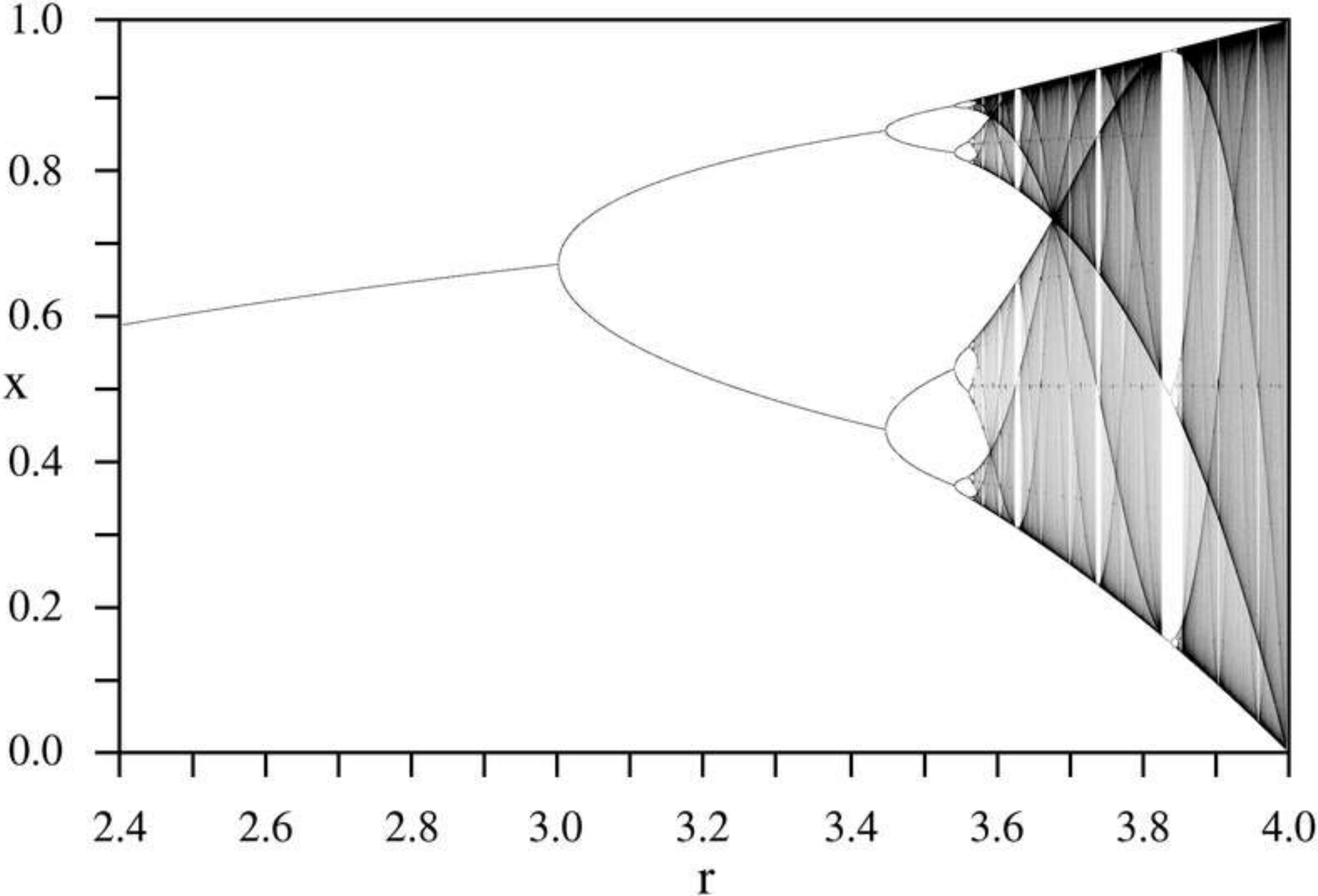
Fases e tensões reais no indutor			
ω0	5405,4(25) rad/s	δ	1,5229(45)rad
		VL	159(4) Ω
ω0 (rad/s)	5330,6(31) rad/s	δ	1,5232(49)rad
		VL	41,3(4) Ω

Tabela 6: Valores de fases e tensões no indutor. Percebe-se que as fases não são compatíveis com π/2 (~1,57 rad)

Resumo dos pontos críticos

- A resistência total é $R + R_L + R_G$
- $\varepsilon_{gerador}$ tem que ser medido com o circuito aberto. Caso contrário mede-se DDP_G.
- $\varepsilon_{gerador}$ devia ser fixo e não DDP_G.
- R_L nominal é confiável? Alguém mediu com o multímetro?
- Será que o indutor tem capacitância parasita entre as voltas do enrolamento?
- A diferença de fase devia ser ligeiramente menor do π, e V_L ligeiramente maior que V_C

Próximas duas Semanas

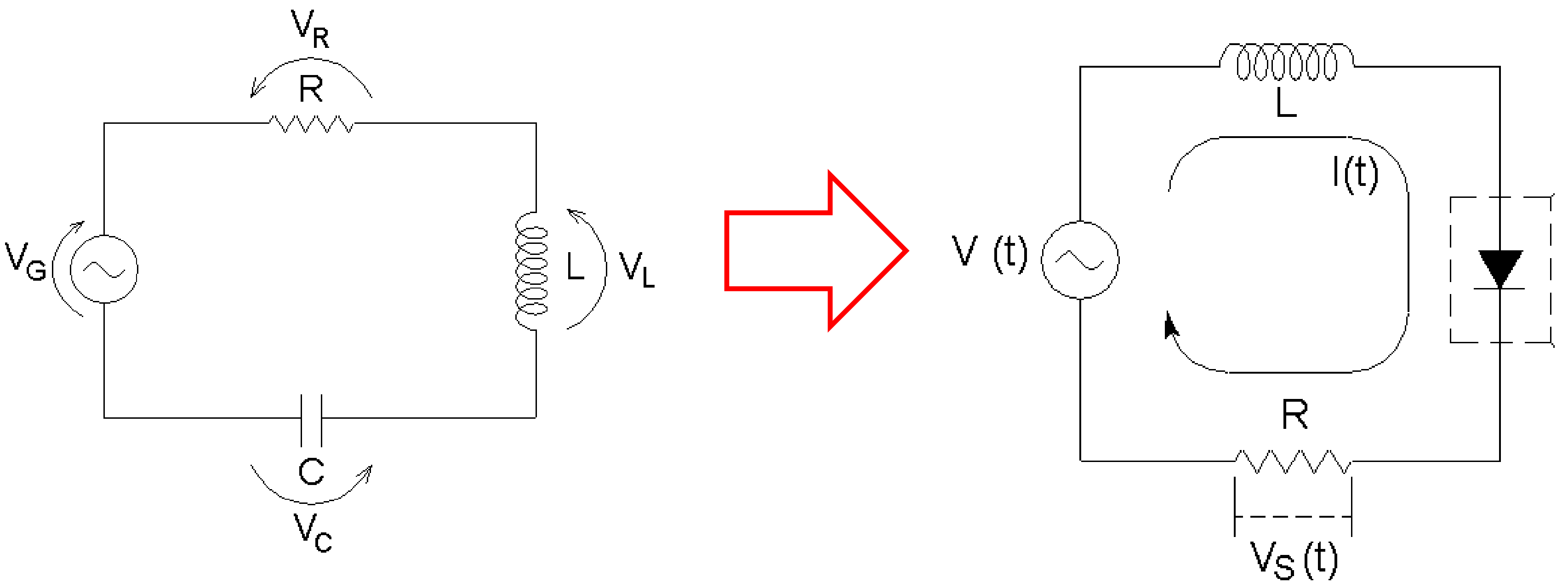


Próximas duas Semanas

- Será que a introdução de efeitos não lineares no RLC muda o comportamento observado?
- Existe algum fenômeno físico interessante e novo que pode ser explorado?
- Resposta: SIM!
  - Nas próximas semanas estudaremos o que acontece se trocarmos o capacitor do circuito por um diodo
    - Diodo → capacitor não linear
  - **A dinâmica muda totalmente → Caos**

Objetivos Para as Próximas Semanas

- Estudar o circuito RLD (ou RLC não linear)



- Semana 1
  - Teoria de caos e experimentos computacionais
- Semana 2
  - Medidas experimentais com RLD

Aula de Hoje

- Introdução a caos e sistemas caóticos
- Estudo de crescimento de populações
  - Mapa logístico

O que é Caos ?

Quais são os limites para a dinâmica (evolução temporal) de um sistema físico?

Comportamento regular rígido

- Pêndulos (relógio)
- Sistema massa-mola
- Queda livre
- Circuito RLC comum

Sistemas que apresentam Caos

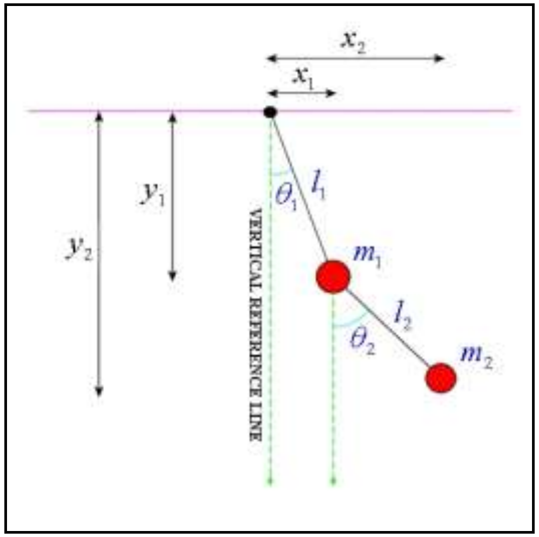
- Clima
- Crescimento populacional
- Pêndulo duplo
- Circuito RLD

Comportamento totalmente aleatório

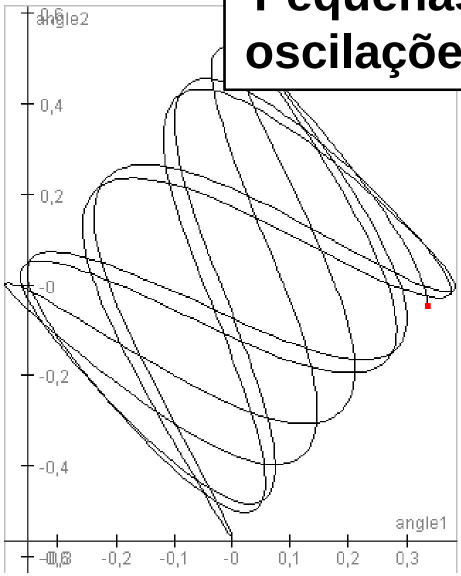
- Jogo de dados
- Decaimento radioativo
- Movimento Browniano

Exemplo: Pêndulo Duplo

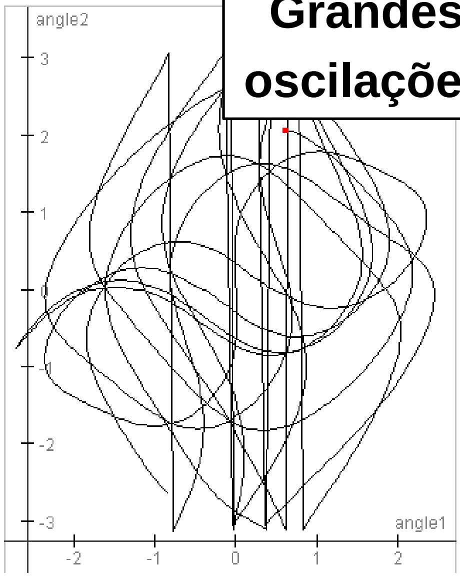
- Um pêndulo amarrado no outro
  - O espaço de fase é composto pelos 2 ângulos e as 2 velocidades



Pequenas oscilações



Grandes oscilações



http://physlab.net/dbl_pendulum.html
http://lecturedemo.ph.unimelb.edu.au/Mechanics/Chaos/Mn-1-Chaotic-Double-Pendulum

Algumas Definições Necessárias

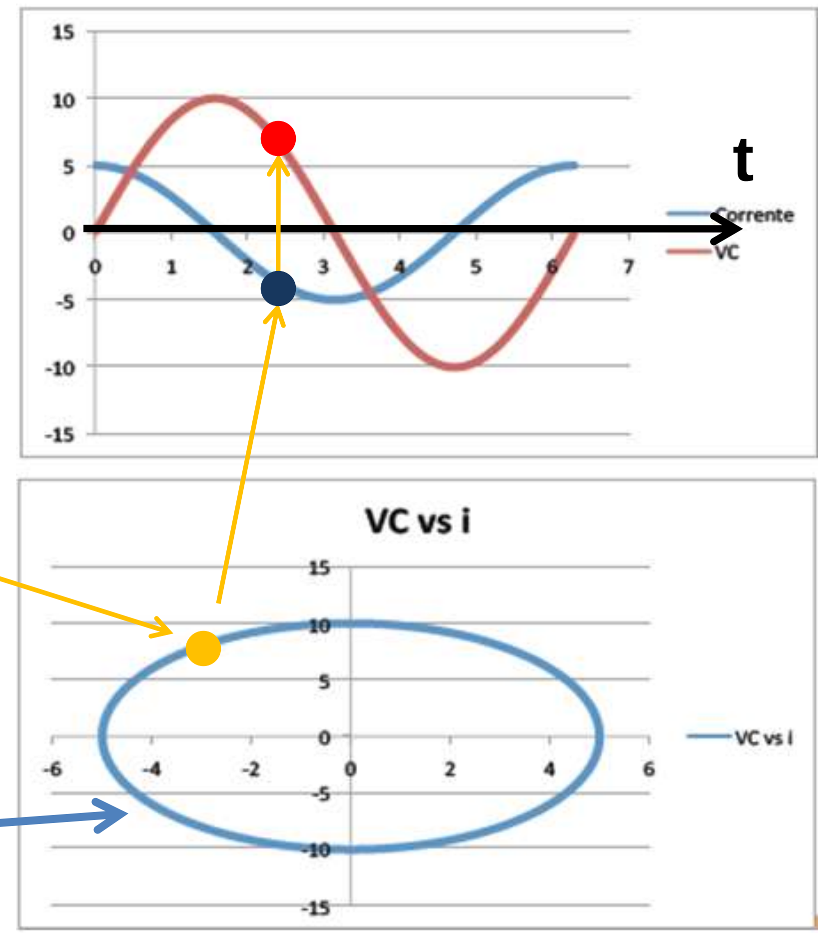
Sistema dinâmico – é qualquer sistema cuja evolução a partir de uma determinada condição inicial é regida por um conjunto de regras. Essas regras podem se resumir a um conjunto de equações diferenciais, que é o caso para sistemas contínuos.

Espaço de fase – é o espaço no qual todos os possíveis estados de um sistema são representados. Em mecânica, por exemplo, seria o conjunto de posições e momentos.

No pêndulo duplo teria 4 dimensões: θ_1, θ_2, θ_1' e θ_2'

Estado – é uma possível condição para o sistema, isto é, uma configuração de variáveis que represente uma condição fisicamente possível ou aceitável.

Retrato de fase – é o conjunto de todos os estados possíveis do sistema dinâmico em questão. Os retratos de fase para sistemas contínuos são trajetórias no espaço de fase.

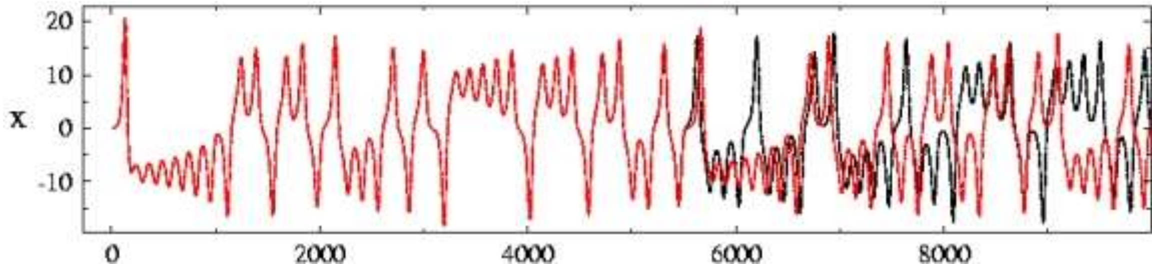


Algumas Definições Necessárias

- **Um sistema dinâmico que descreve um sistema físico real** depende de um ou mais parâmetros chamados de **parâmetros de controle**.
- Por exemplo: a **freqüência natural de oscilação** é um parâmetro de controle de um oscilador harmônico simples.
- No caso de um circuito **RLC forçado**, tanto a **freqüência** quanto a **amplitude da tensão aplicada** são parâmetros de controle.
- Um sistema dinâmico pode, portanto, ser pensado como função do parâmetro de controle. De fato, pode-se **influir no comportamento dinâmico do sistema alterando-se o valor de um parâmetro de controle**.

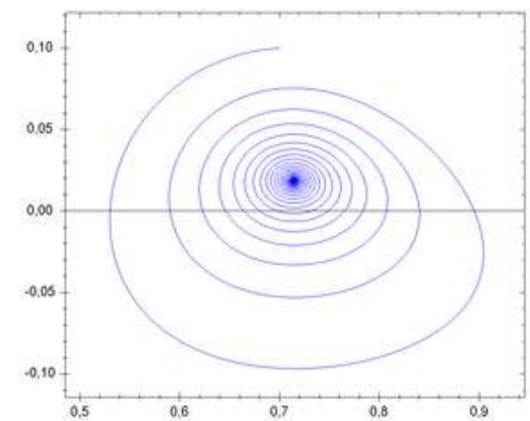
CAOS: Principais Características

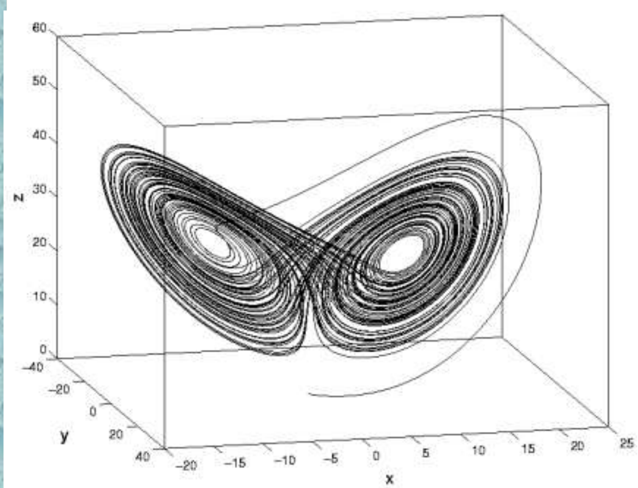
- **Não linearidade**. Se o comportamento de um sistema for linear, esse sistema não pode ser caótico
- **Sensibilidade a condições iniciais**: pequenas alterações nas condições iniciais podem levar a comportamentos radicalmente diferentes do sistema em seu estado final. É o chamado "efeito borboleta". Os sistemas caóticos também apresentam sensibilidade aos parâmetros de controle.
- **Determinismo**: existem regras subjacentes determinísticas (e não probabilísticas) que todo estado futuro do sistema deve obedecer
- **Manutenção da irregularidade no comportamento do sistema**. Há uma ordem oculta que inclui um número grande ou infinito de configurações periódicas ocultas na infra-estrutura desses sistemas: há uma "ordem na desordem".
- **Previsão de longo prazo impossível:** em decorrência da sensibilidade às condições iniciais, a previsão (mas não o controle) do comportamento de sistemas caóticos de **longo prazo é impossível**, porque as condições iniciais são conhecidas com grau de precisão finito.



CAOS: Como são as trajetórias no espaço de fase?

- **Existe 3 possibilidades para essas trajetórias**:
  - as trajetórias tendem a se concentrar numa determinada região do espaço de fase e não saem mais de lá: esses são chamados de estados assintóticos do sistema ou **atratores**.

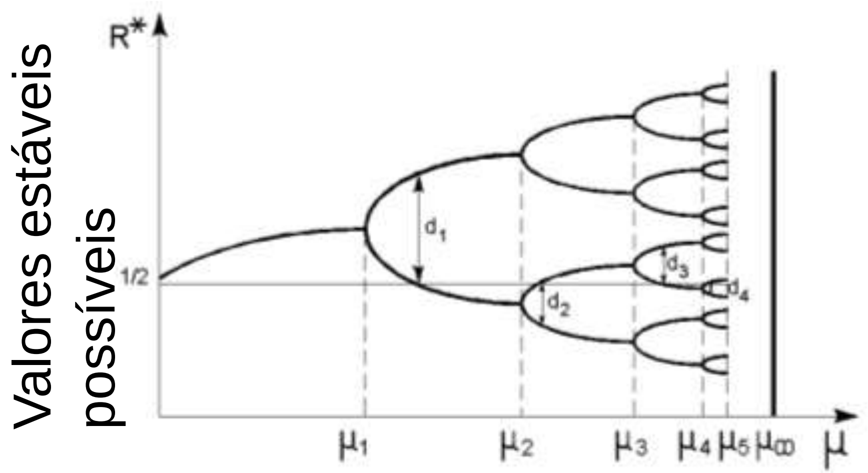




  - as trajetórias tendem a se afastar uma das outras e vão para o infinito
  - as trajetórias ficam "passeando" por todo o espaço de fase

CAOS: Como se chega lá?

- **Bifurcações** – Vamos supor que um sistema dinâmico tenha um parâmetro de controle μ.
  - Variando-se μ podem aparecer novos padrões de comportamento ou seqüências de novos estados estáveis(atratores) para o sistema.
  - Neste caso diz-se que ocorreram **bifurcações** e μ_n é o valor do parâmetro de controle para o qual ocorreu a n-ésima bifurcação.
  - Em outras palavras, variando-se μ pode-se variar tanto a posição quanto as características qualitativas dos pontos de equilíbrio estáveis (atratores) do sistema.



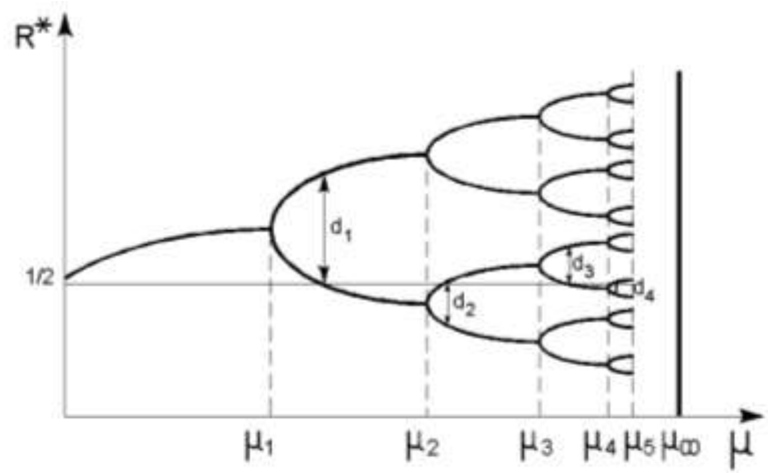
CAOS: Como se chega lá?

- Nesse caso uma solução estável do sistema perde a estabilidade com a variação de um parâmetro de controle e aparece uma nova solução estável com o dobro do período da solução anterior. Então diz que para $\mu=\mu_n$ houve uma bifurcação porque o "período" duplicou. Essas soluções são estados assintóticos do sistema, geralmente chamados de **atratores**.
- Rota mais comum para o caos (**cenário de Feigenbaum**) é a duplicação dos atratores

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{\mu_{n+1}-\mu_n}=\delta$$

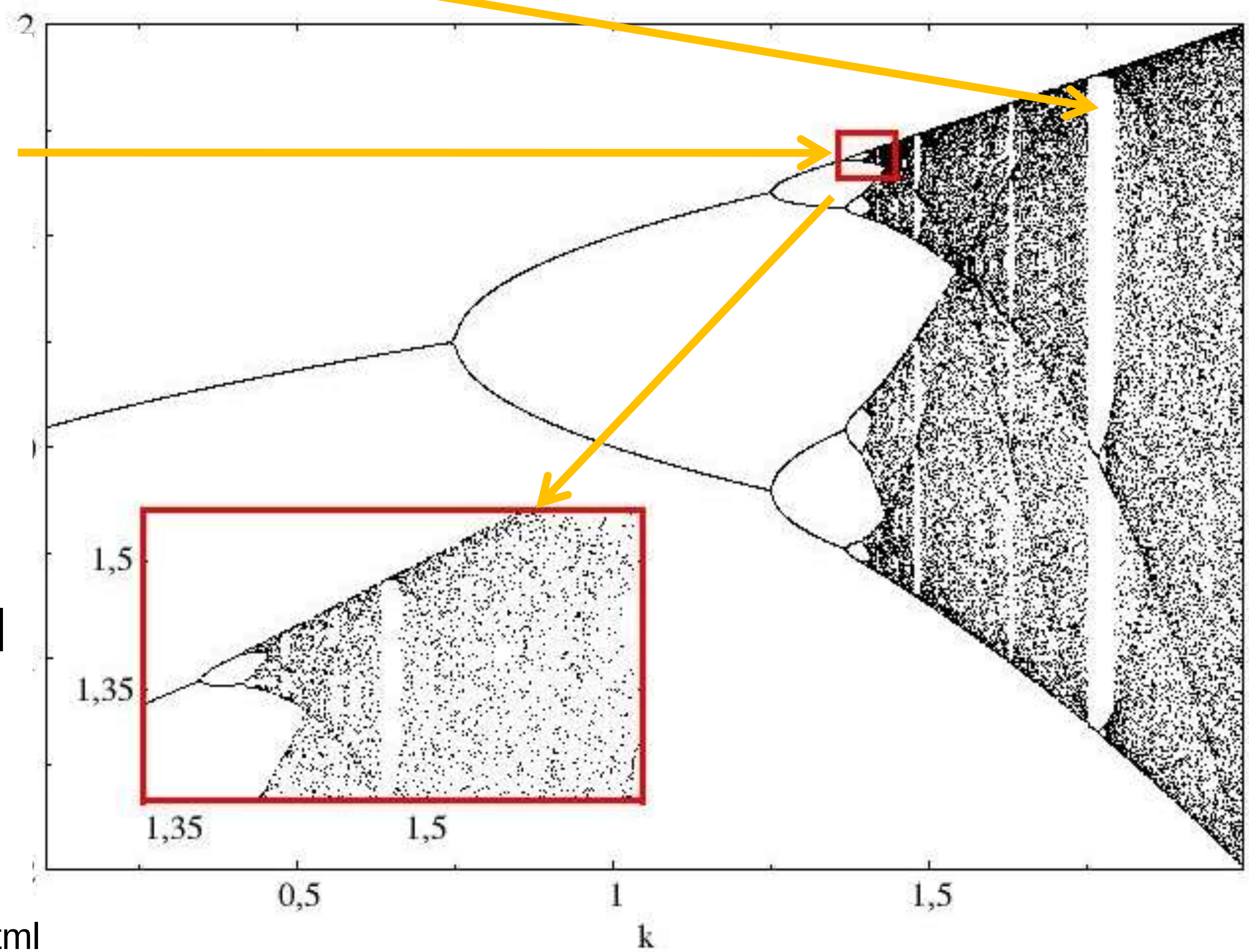
$$\delta = 4,6692016091029909...$$

Constante de Feigenbaum



Caos e Fractais

- A sucessão de dobramentos do período acaba levando ao domínio caótico, que *parece* **(mas não é)** uma nuvens de pontos dispersos.
- No meio do caos, há janelas indicando uma dinâmica organizada e previsível.
- Um pequeno pedaço é similar ao diagrama todo $\Rightarrow$ fractal.
- ... Ou melhor: o domínio caótico aparece como uma nuvens de pontos com dimensão fractal no espaço de parâmetros

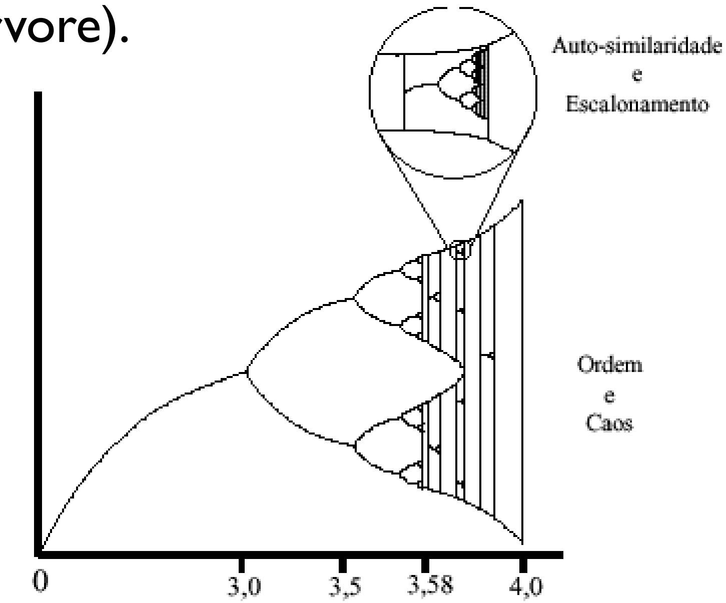


http://complex.upf.es/~josep/Chaos.html

Caos e Fractais

Fractal - é a propriedade de se fraturar em padrões auto-similares e escalonados. Fractais possuem:

- **Auto-similaridade** - existem padrões dentro dos padrões que nunca são exatamente os mesmos mas que são sempre similares (galhos de uma árvore que se bifurcam cada vez mais até chegar nas micro-nervuras da folha, mas que têm praticamente o mesmo padrão de bifurcação).
- **Escalonamento** - quando examinamos os padrões de auto-similaridade em escalas cada vez menores, verificamos que eles são repetições de si mesmos (podemos "enxergar" o padrão de nervuras de uma árvore inteira em qualquer folha desta mesma árvore).



Wagner P. Paiva http://www.cyta.com.ar/ta0203/v2n3a2/v2n3a2.htm

Exemplo Simples de CAOS

- Em 1838, Pierre Verhulst publicou sua “equação logística” para descrever o crescimento de populações, ou a taxa de crescimento em função da população atual e do parâmetro ***r***.

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x), \text{com } x = \frac{\text{número de indivíduos}}{\text{capacidade do ambiente}}$$

- r é o número malthusiano:
  - Se r < 0 a população sempre morre com o tempo
  - Se r > 0 a pode sobreviver
- Essa equação pode ser resolvida de maneira exata e a solução só depende de x0 e de r.

$$x(t) = \frac{1}{1+({x_0}^{-1}-1)e^{-rt}}, \text{função sigmoide}$$

Exemplo Simples

- A equação de **Verhulst** possui inconvenientes para o estudo de evolução de populações pois a população em qualquer instante t depende somente das condições iniciais e é contínua.
- Era desejável haver modelos onde o estágio atual da população dependa apenas da geração anterior e não da condição inicial.
- O **Mapa Logístico** é um análogo discreto no tempo da equação logística e foi popularizado por um paper de 1976 de **Robert May.** Físico teórico australiano, ele começou a trabalhar com biologia quando foi para o Instituto de Estudos Avançados de Princeton em 1971.

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

Exemplo Simples: Mapa Logístico

Crescimento de Populações:

- O mapa logístico descreve o tamanho da populações em função de seu tamanho na geração anterior:

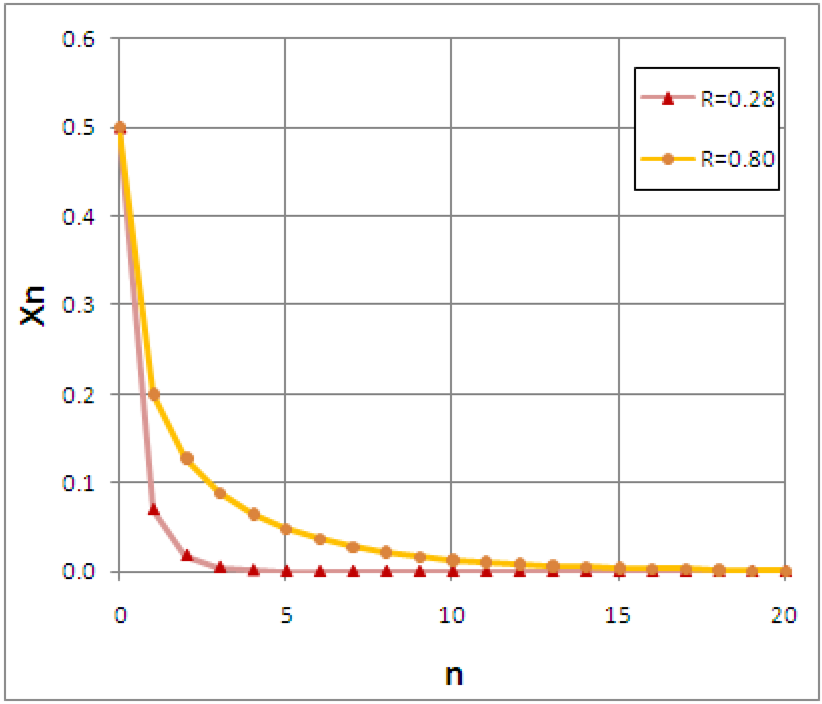
$$x_{n+1} = x_n \cdot r(1 - x_n)$$

  - x_n são frações da população máxima (capacidade do meio)
  - x_0 é a fração inicial
  - **r** é o potencial biótico e **r(1-xn)** é a taxa de crescimento
- Neste caso r é sempre maior do que 0
- Como é a evolução temporal da população (tamanho das gerações n=1,2,3...) em função da condição inicial X_0 e do potencial biótico?

Calculando o Mapa Logístico(1)

- Na mão:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$



x0=0.500 e r=0.5

x1=.5*.5*(1-.5)=.125

x2=.5*.125*(1-.125)=.055

x3=.5*.055*(1-.055)=.026

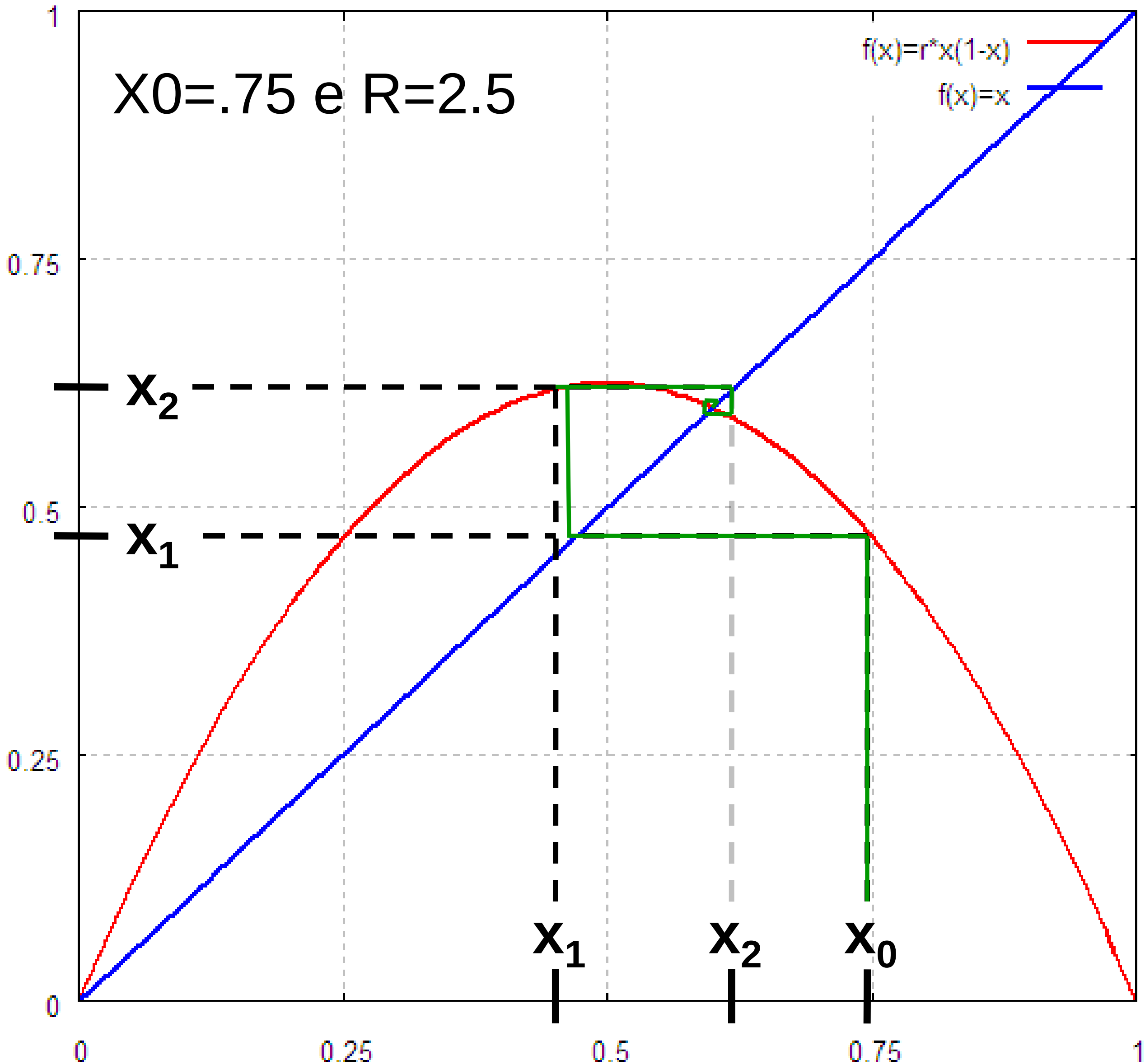
x4=.5*.026*(1-.026)=.013

...

x9=0.000

Para estes parâmetros a população não sobrevive

Calculando o Mapa Logístico(2)



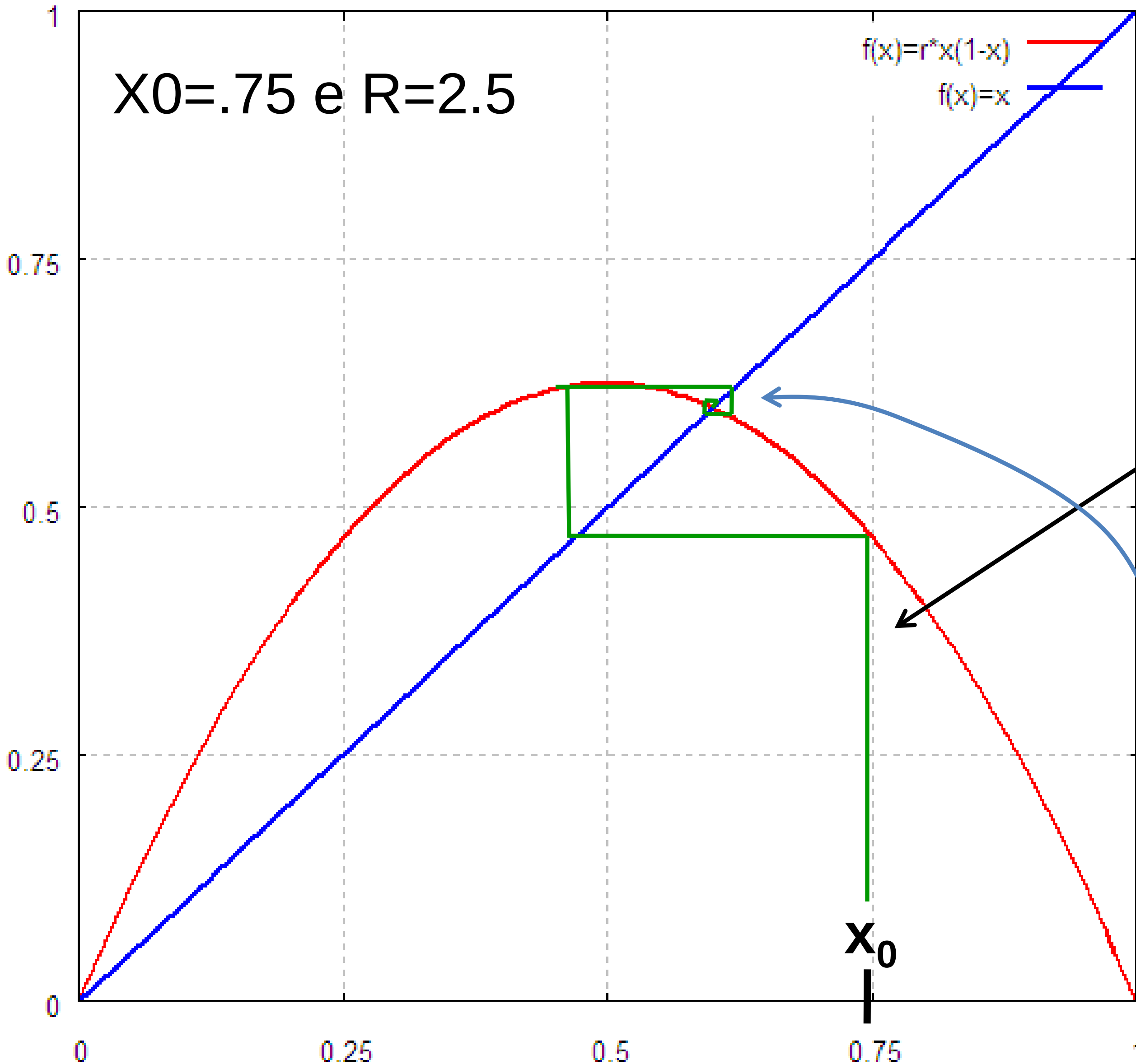
- Meios gráficos:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

1) Calcula-se o valor de $f(x_0)$
2) Rebate-se na reta para ter x_1
3) Calcula-se o valor de $f(x_1)$
4) Rebate-se na reta para ter x_2
5) etc...

A população estabilizou em 0.6

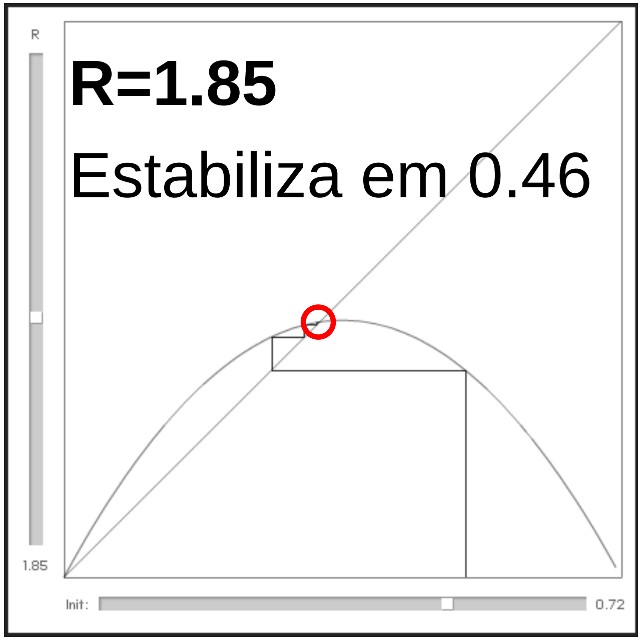
Calculando o Mapa Logístico(2)

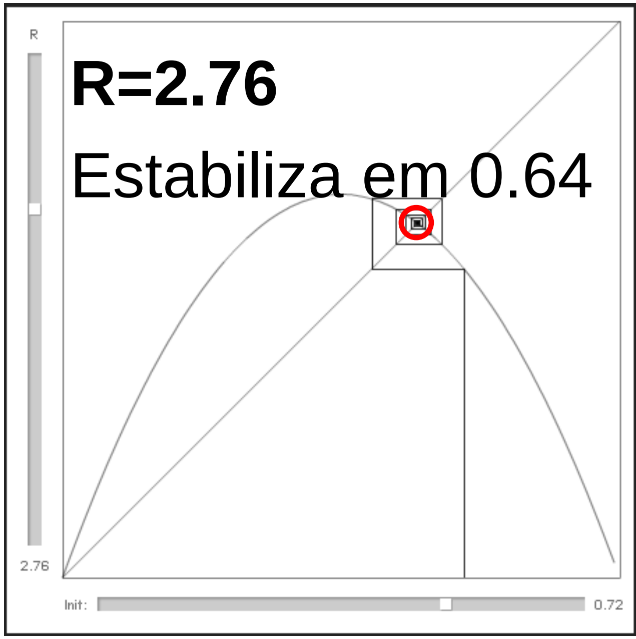


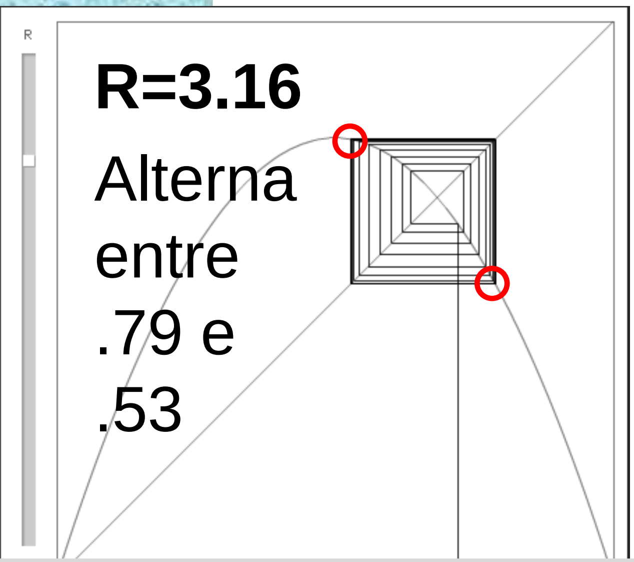
IMPORTANTE: O comportamento depende de r.

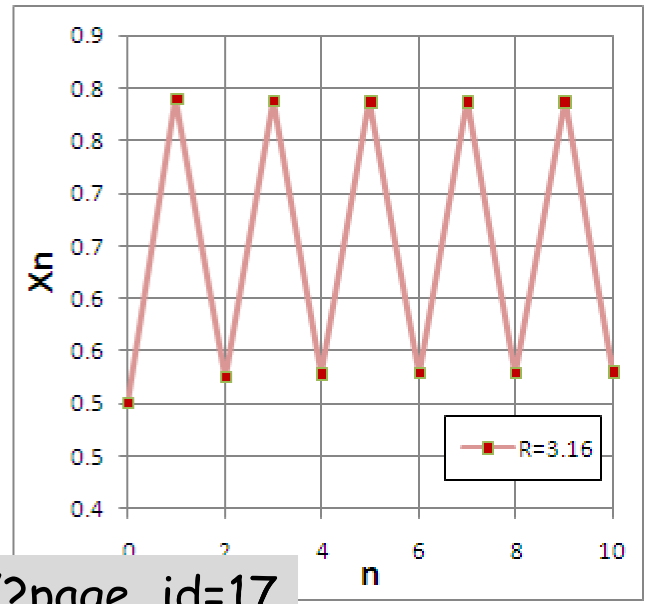
- Transiente:
  - As várias iterações antes da população estabilizar
- Estacionário
  - As iterações depois do transiente

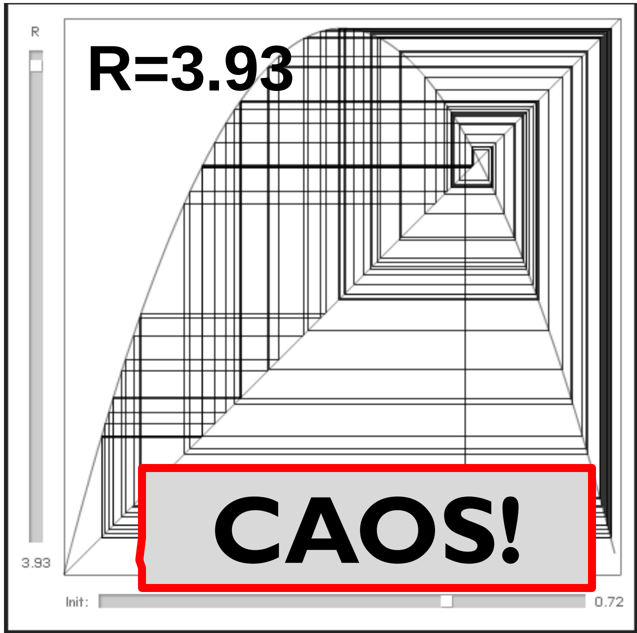
Applet Mapa Logístico – x_0=0.72











http://www.chaos-101.com/?page_id=17

Se divertindo com o Applet

- Varie **r** para um x_0 qualquer e veja que para **r<1** a solução final (atrator) depois de várias iterações é sempre **zero**:
  - variando x_0 o que muda é a rapidez com que a solução se aproxima do atrator

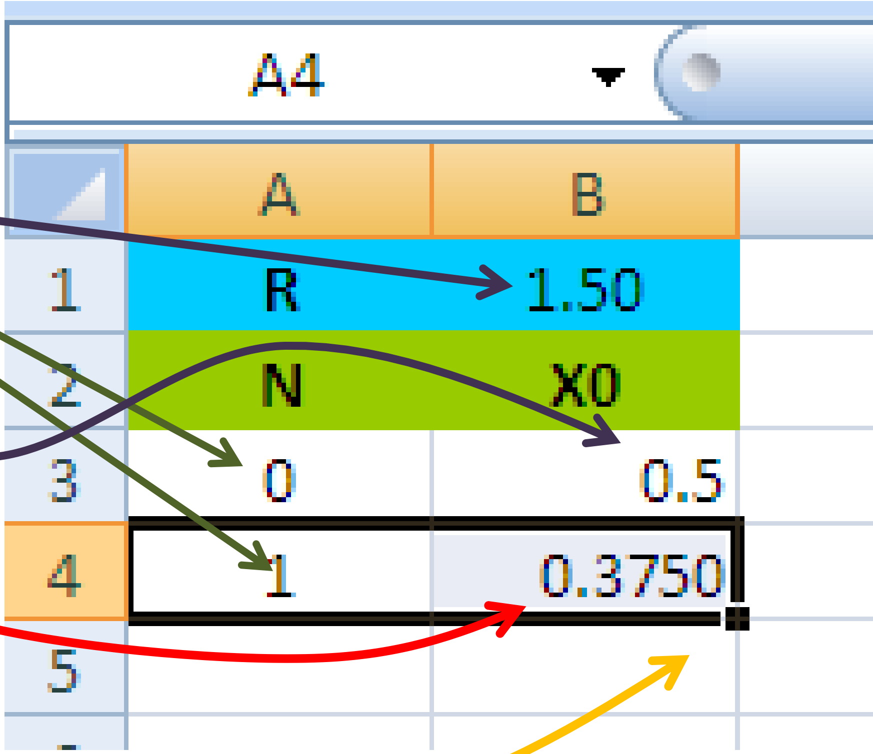
- Agora faça **r=2,5** e veja que **zero** não é mais um atrator, o novo atrator é a intersecção da parábola **f(x)=x r(1-x)** com a reta **f(x)=x**, para qualquer valor de x_0.

- Agora faça **r=3,2** e veja que agora a interseção da parábola e da reta **não** é mais um atrator. Temos **dois** atratores, dados pela interseção do quadrado com a parábola.

- Aumente **r** ainda mais e veja aparecer o caos!

Calculando o Mapa Logístico(3)

- Ao invés de fazer “na mão” podemos usar o Excel
- Valores Constantes:
  - R na célula B1
  - N nas células A3 e A4
  - x0 na célula B3
- A célula B4 (x1) vale:
  - =B$1*B3*(1-B3)
- Selecionar a linha 4
  - E arrastar com o mouse para repetir a fórmula para as outras linhas.



Calculando o Mapa Logístico(3)

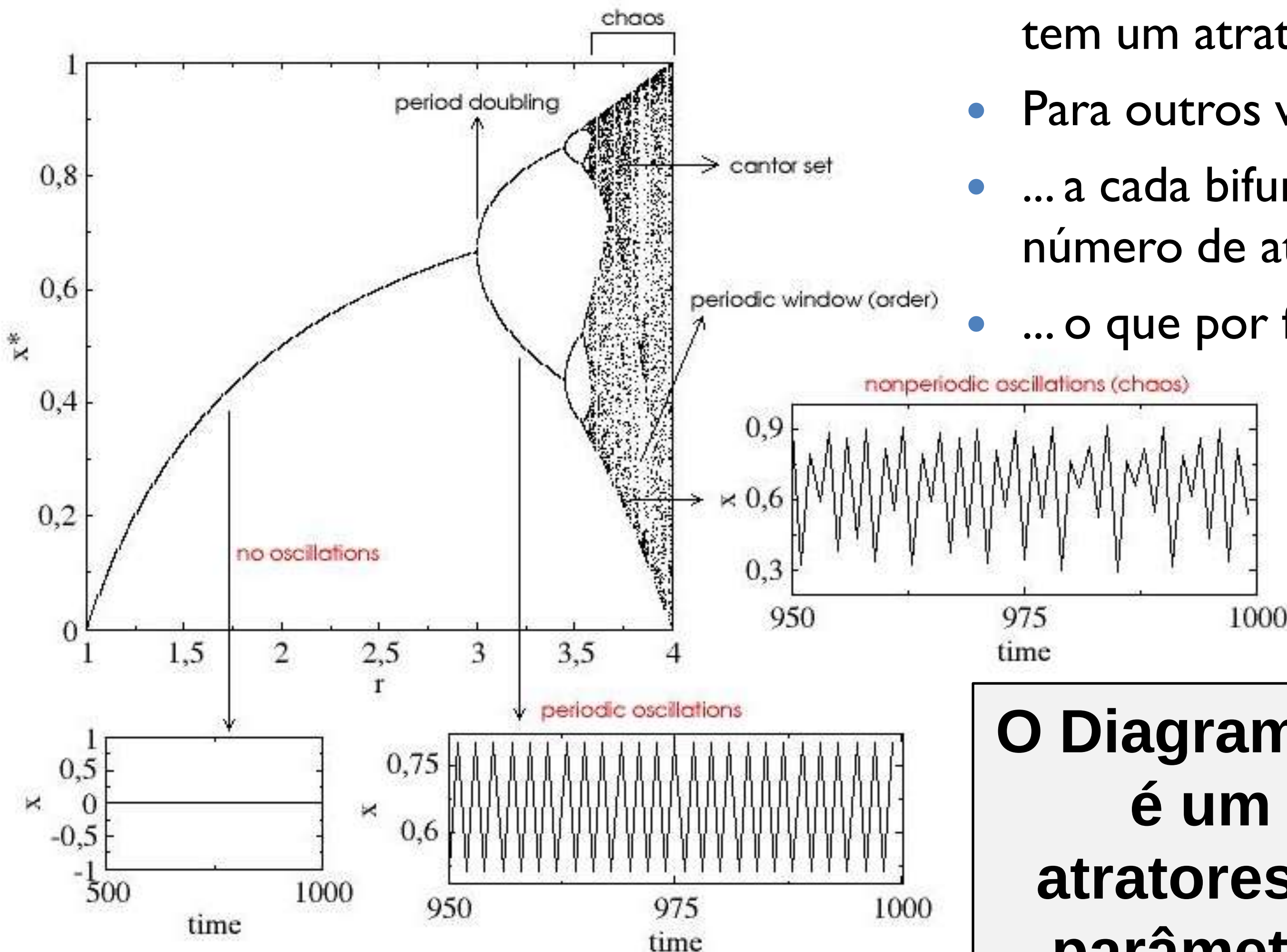
Você pode calcular para vários "R"s de uma vez, ou mesmo definir um intervalo de valores onde serão calculados!

Lembre-se que o número de iterações é importe, para ter certeza do valor é bom ter pelo menos 500 iterações.

C4 | fx | =C1+(E1-C1)/100*C3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		min=	0.2	max	4					
2										
3		0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	R	0.20	0.24	0.28	0.31	0.35	0.39	0.43	0.47	0.50
5	N	X0								
6	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
7	1	0.0500	0.0595	0.0690	0.0785	0.0880	0.0975	0.1070	0.1165	0.1260
8	2	0.0095	0.0133	0.0177	0.0227	0.0283	0.0343	0.0409	0.0480	0.0555
9	3	0.0019	0.0031	0.0048	0.0070	0.0097	0.0129	0.0168	0.0213	0.0264
10	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

O Diagrama de Bifurcação



- Para alguns valores de R o sistema tem um atrator
- Para outros valores, tem dois
- ... a cada bifurcação, dobramos o número de atratores
- ... o que por fim nos leva ao caos!

O Diagrama de bifurcação é um gráfico dos atratores em função do parâmetro de controle

Se divertindo com a Planilha

O que é interessante de se observar:

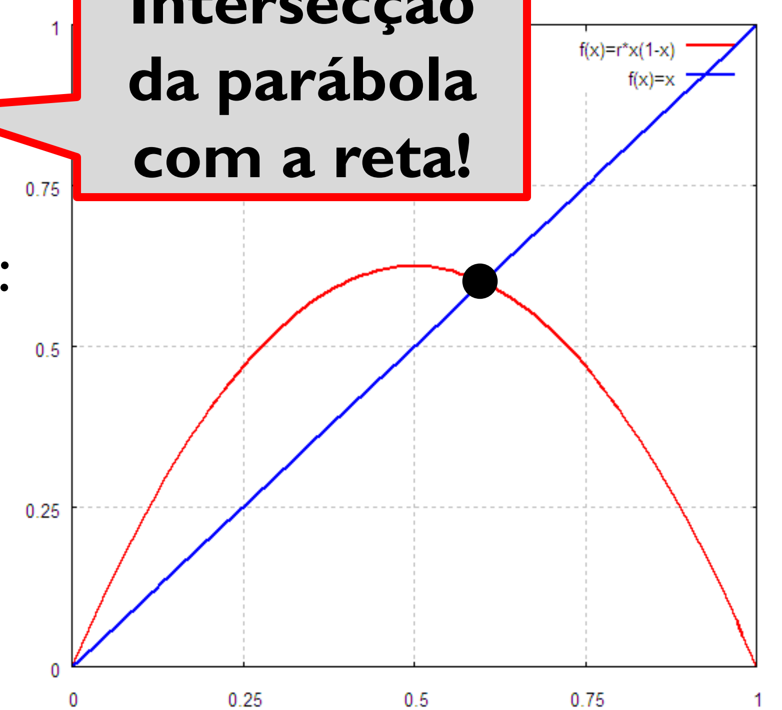
- Faça gráficos de x_n como função de n para vários valores de parâmetros de controle r.
  - Por exemplo varie r de 0.5 até 4 de 0.25 em 0.25. O que acontece? Deixe x_0 fixo em 0.5.
- O número de iterações é importante a solução deve atingir a estabilidade (quando isso é possível) (digamos 500 no mínimo)
- Faça um gráfico dos valores das soluções estabilizadas contra o parâmetro de controle. Veja o que ocorre.

Prevendo os Atratores

- Há uma maneira de prever quais seriam os atratores?
  - Quando chega no atrator qualquer iteração fornece sempre o mesmo valor. Matematicamente:

$$x_{n+1}=x_n \Rightarrow rx_n(1-x_n)=x_n$$

Intersecção da parábola com a reta!



  - As soluções dessa equação são:

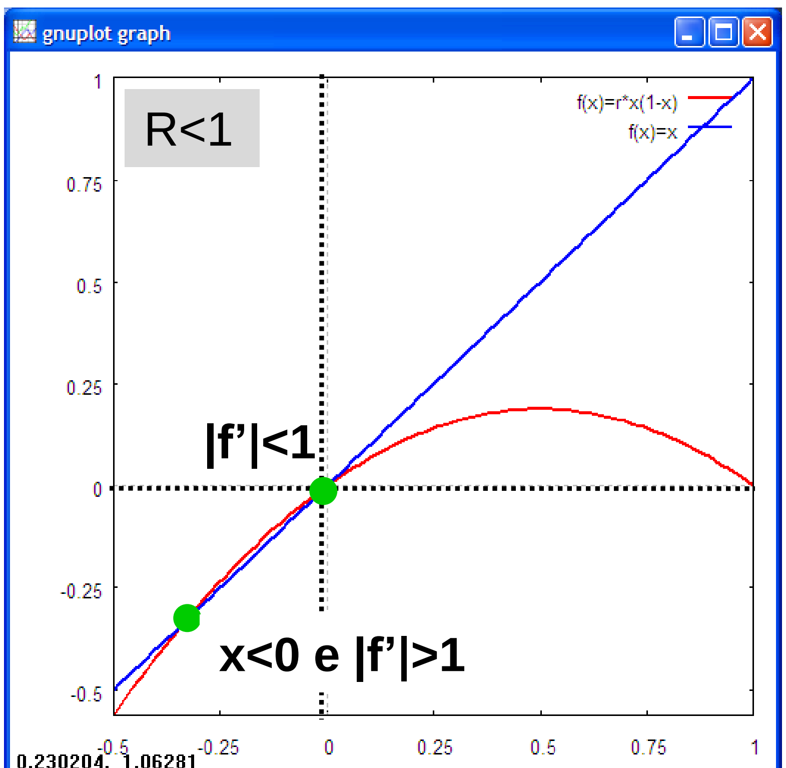
$$x_n=0 \text{ e } x_n=(1-1/r)$$

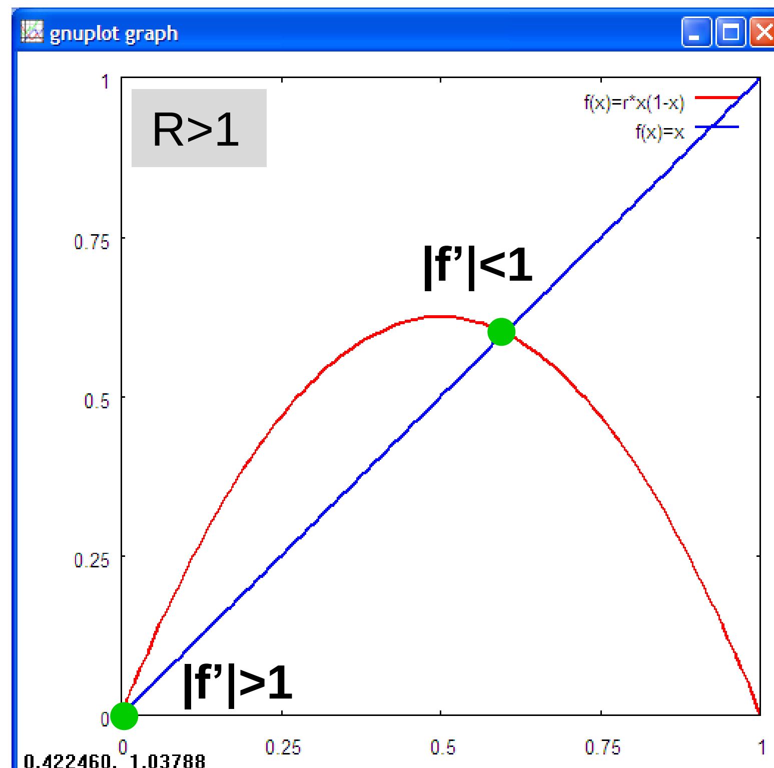
- **Será que ambas as soluções são atratores?**

Prevendo Atratores

- Vimos no Applet que para **$r<1$, $x_n=0$** é o atrator e **$x_n=(1-1/r)$** não é
- Vimos na planilha que para **$r>1$**, **$x_n=(1-1/r)$** é o atrator e **$x_n=0$** não é.
- Onde ocorre essa troca? e qual a condição para ser um atrator?

- Não vamos provar matematicamente, mas a condição para ser um atrator é que **módulo da derivada $f'(x_n)$ seja menor que 1** (ou seja que a parábola não esteja mais inclinada do que a reta)





As Soluções de $x_{n+1}=x_n$

- A derivada é simplesmente:

$$f'(x_n)=r-2rx_n$$

- Caso $x_n \to 0$
  - $f'(0)=r$
  - Para que seja um atrator $|f'| < 1 \Rightarrow -1<r<1$
  - e como $r>0$ então: $0<r<1$
- Caso $x_n \to 1-1/r$
  - $f'(1-1/r)=2-r$
  - Para que seja atrator $|f'|<1 \Rightarrow |2-r|<1 \Rightarrow 1<r<3$

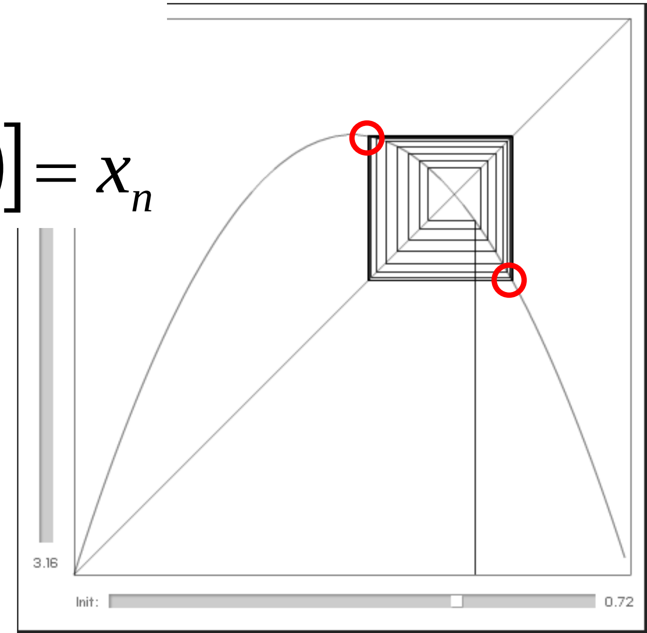
- **VERIFIQUEM isso no applet!**

Prevendo 2 Atratores

- Observamos na planilha e no applet que para determinados valores de **r>3**, não tem **1** atrator, mas tem **2** atratores!
- Como prever isso? Basta usar a condição **$x_{n+2}=x_n$**, o que significa que a cada duas iterações repete-se um valor
- Vamos calcular:

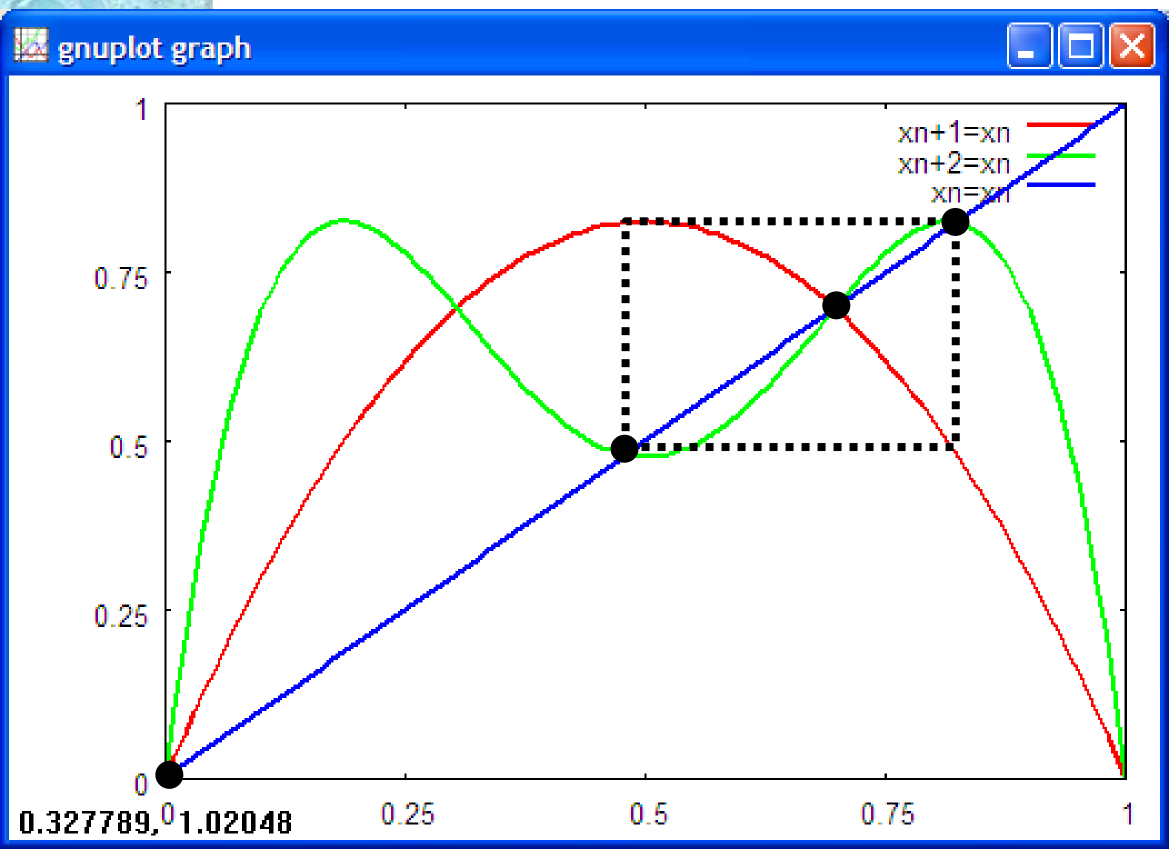
$$
\begin{aligned}
x_{n+2} &= r x_{n+1}\left(1 - x_{n+1}\right) \\
&= r\left[r x_n\left(1 - x_n\right)\right]\left[1 - r x_n\left(1 - x_n\right)\right] = x_n
\end{aligned}
$$

- **Ou seja, agora os atratores estão na intersecção da reta com um polinômio de 4º grau.**



As Soluções de $X_{n+2}=X_n$

- No gráfico vemos um exemplo das soluções. Duas delas coincidem com as anteriores, mas neste caso ambas tem **|f'|>1** e não servem.
- As outras duas soluções são:



$$x_n = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

- Aplicando a condição para a existência de atratores:

$$|f'(x_n)|<1,$$

- chega-se à conclusão que

$$3<r<(1+\sqrt{6})$$

- vocês podem verificar isso com o applet.

Para esta semana 1

A convergência para os atratores:

- Fazer os gráficos de x_n como função de n para vários valores de parâmetros de controle. Deixando x_0 fixo em **0.5**, faça:
  - Três valores de r para $0<r<1$ (no mesmo gráfico)
  - Três valores de r para $1<r<3$ (idem)
  - Dois valores de r para $3<r<1+\text{raiz}(6)$ (idem)
  - ***Atenção: que intervalo de n é interessante mostrar para cada um deste gráficos? Precisa mostrar até n=500? Queremos ver os regimes transientes e estacionários.***
- Para cada intervalo, explique o que esta ocorrendo:
  - Qual o numero de atratores?
  - Por que uma determinada solução é o atrator?
  - Por que existe(m) esse(s) atrator(es)?

Para esta semana 2

Sensibilidade a condição inicial:

- Fazer gráficos de x_n como função de n para os regimes **com e sem caos** partindo de **2** condições iniciais muito próximas: $x_0=0.5$, $x_0=0.50001$
  - **Atenção:** Queremos comparar a evolução das soluções.

Diagrama de bifurcação:

- Faça um gráfico dos valores das soluções estabilizadas (os valores lá no final da tabela) em função do parâmetro de controle.
  - **Atenção:** O número de iterações é importante pois a solução deve atingir a estabilidade (quando existe). No mínimo **500** iterações.
- Determine a posição da 1°, 2° e 3° bifurcação e calcule a constante de **Constante de Feigenbaum** (com incerteza)

Dicas

- Vocês podem levar a tabela para casa, mas tem que cumprir a presença no lab. Aproveitem para discutir com os colegas e tirar dúvidas com os monitores.