

# Física Experimental IV – FAP214

Notas de aula: [www.fap.if.usp.br/~hbarbosa](http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa)

LabFlex: [www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex](http://www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex)

## Aula 2, Experiência I Circuitos CA e Caos

Prof. Henrique Barbosa

[hbarbosa@if.usp.br](mailto:hbarbosa@if.usp.br)

Ramal: 6647

Ed. Basílio Jafet, sala 100

# Intro...

Podem me procurar! me encontrando,  
estou sempre a disposição.

Prof. Henrique Barbosa

hbarbosa@if.usp.br

Ramal: 6647

Ed. Basílio Jafet, sala 100

<http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa>

**Vejam as notas de aula e os manuais de preparação  
das sínteses e relatórios.**

Usem a lista de discussão para tirar as dúvidas, pois pode  
ajudar outros alunos.

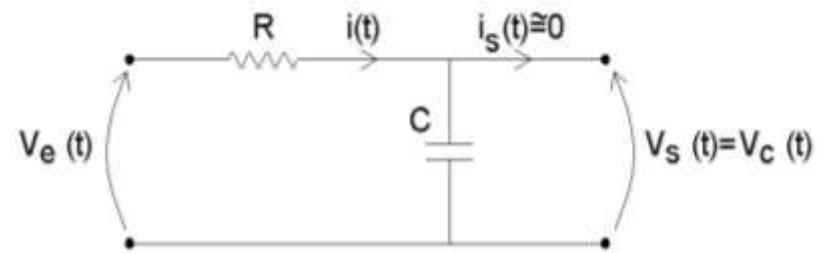


# TAREFAS SEMANA PASSADA



# Filtros e Circuitos Especiais

O Ganho é:  $\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = G_0 e^{j\phi_G}$



Sendo:

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

R e C podem ser medidos e há valores nominais

$$G_0 = \frac{V_s^0}{V_e^0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \quad \phi_G = \omega \Delta T_{S-C} = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Tensões são medidas com osciloscópio

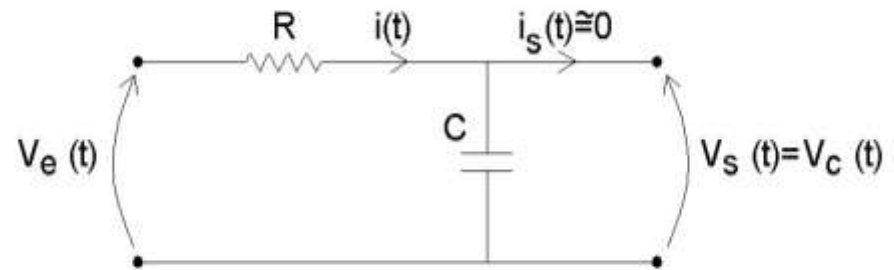
A frequência também

Intervalo de tempo entre duas tensões também é mensurável

# Filtros e Circuitos Especiais

- Então:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_e} = \frac{1}{j\omega RC}$$



- Ou ainda:

$$\hat{V}_s = \frac{1}{j\omega RC} \hat{V}_e$$

- Lembrando que:  $\hat{V}_e = V_e e^{j\omega t}$

- E que:  $\int \hat{V}_e dt = \frac{1}{j\omega} V_e e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega} \hat{V}_e$

- Temos que:

$$\hat{V}_s = \frac{1}{RC} \int \hat{V}_e dt$$

# Capacitor

- Gráfico de  $Z_C$  experimental em função de  $\omega$ 
  - lembre-se que  $Z = \text{Tensão/corrente} \rightarrow Z = 1/\omega C$
  - Obter o valor da capacitância deste gráfico
- Gráfico de  $\phi_C$  (fase do capacitor) em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente para o capacitor

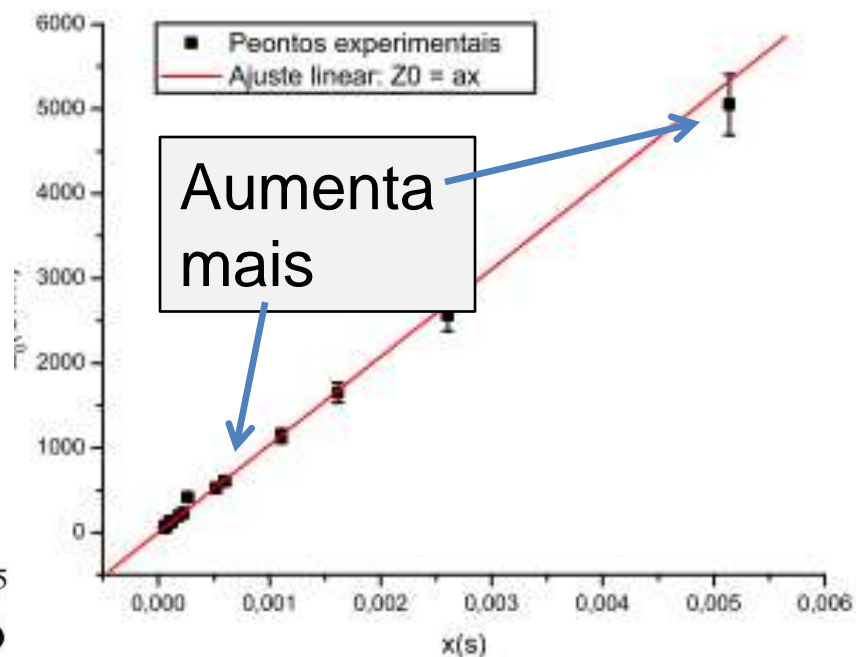
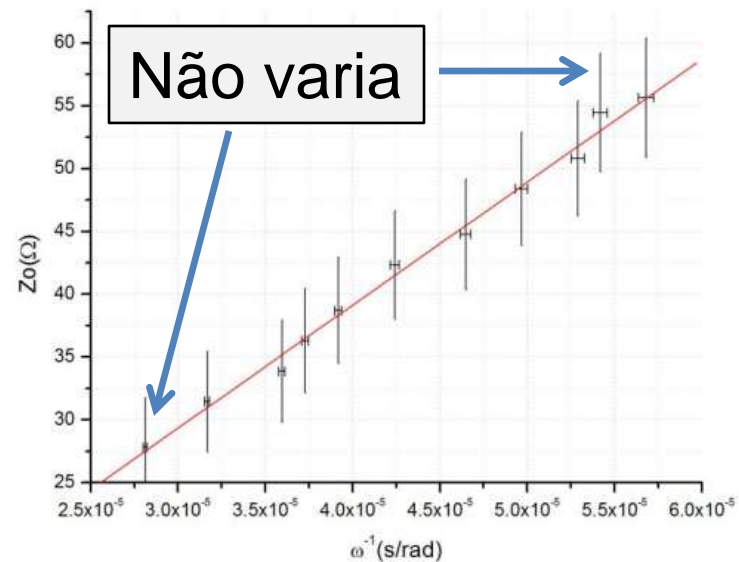
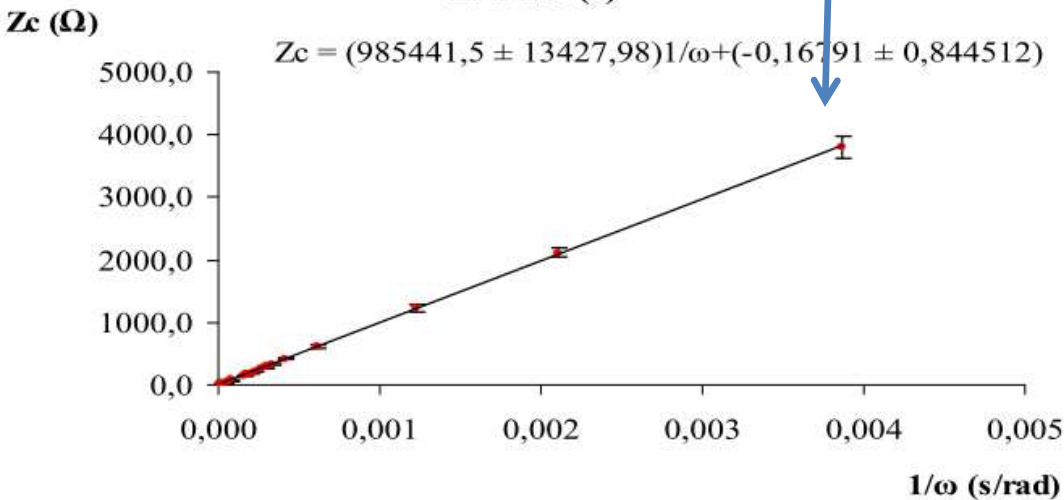
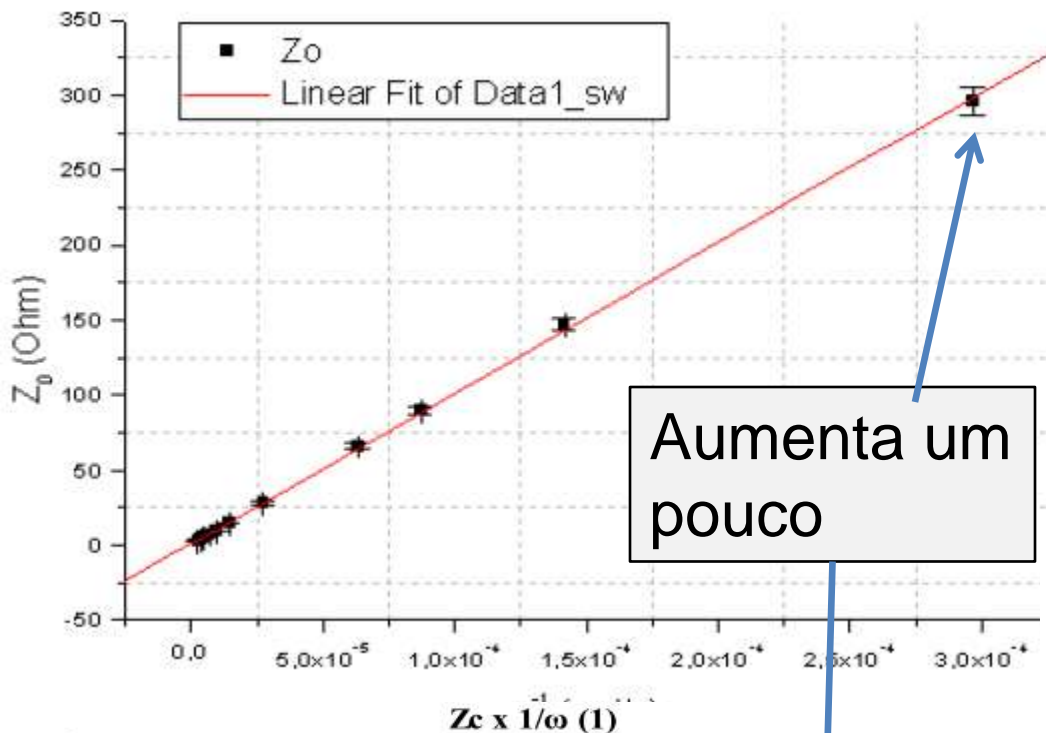
# Filtro RC

- Gráfico de  $G_0$  em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente
- Gráfico de  $\phi_G$  (fase entre  $V_s$  e  $V_e$ ) em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente

# Integrador

- Mostrar que  $V_s$  é a integral de  $V_e$ 
  - Foto da tela do osciloscópio
  - Inclinação do triângulo é a esperada teoricamente
  - Para quais frequências o circuito é um integrador ?

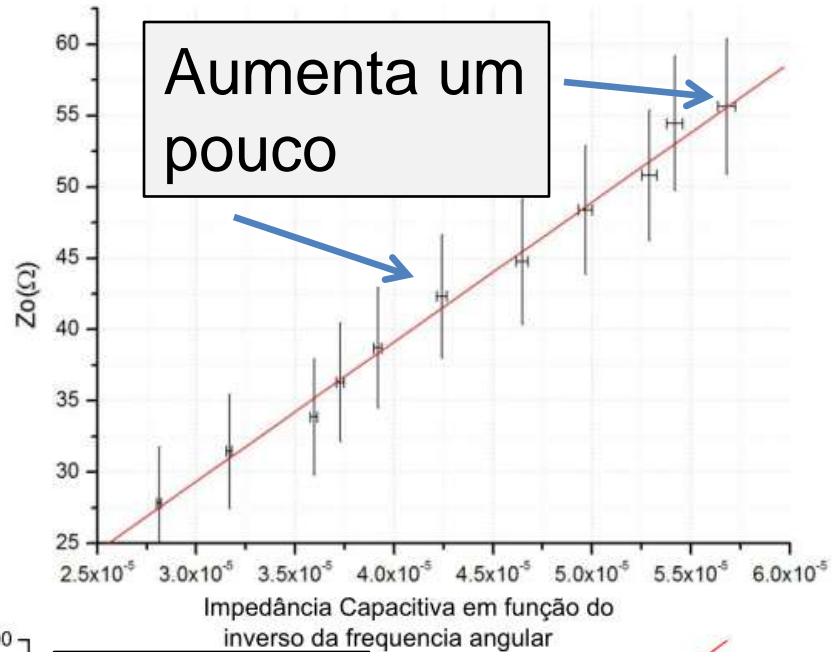
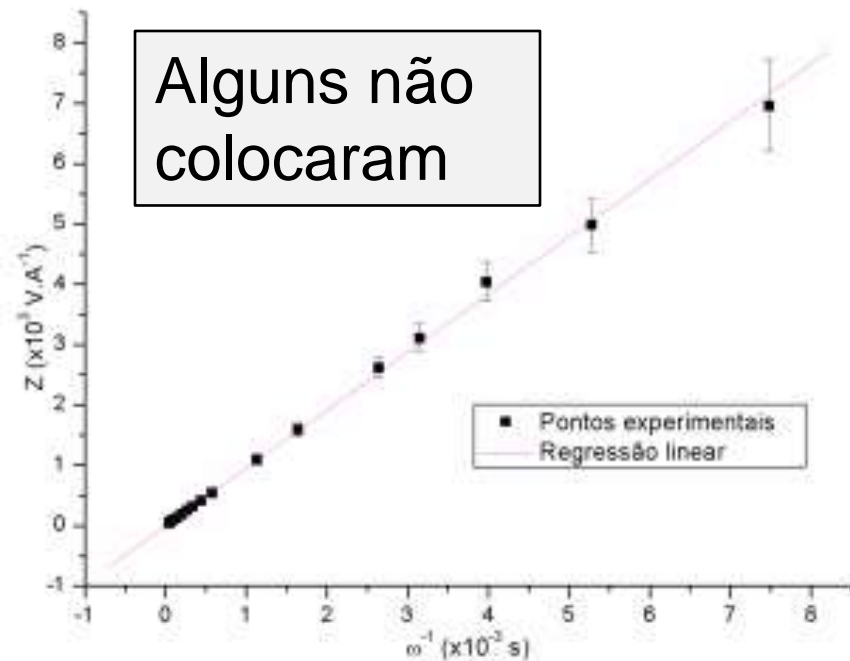
# Incerteza em $Z_0$



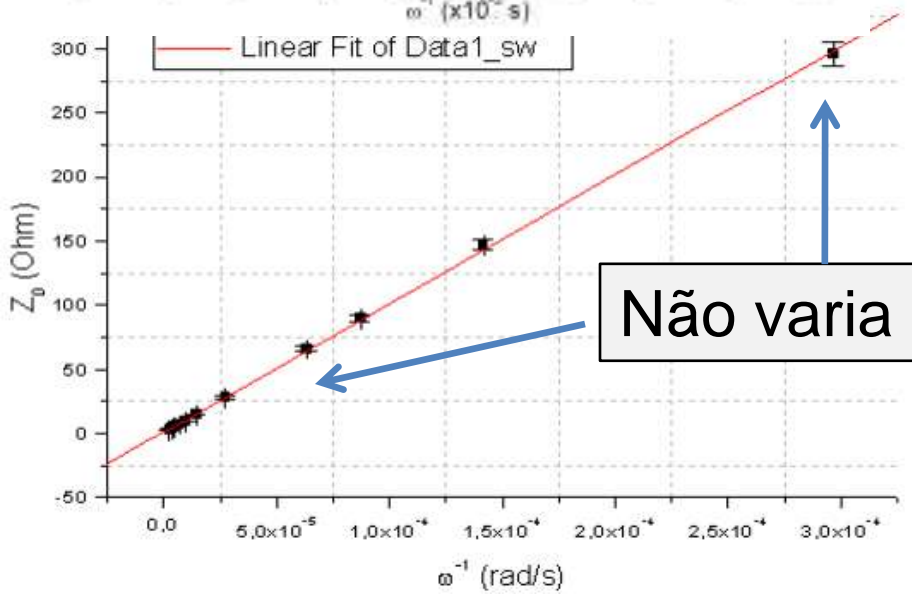
# Incertezas em $1/\omega$



Alguns não colocaram



Aumenta um pouco



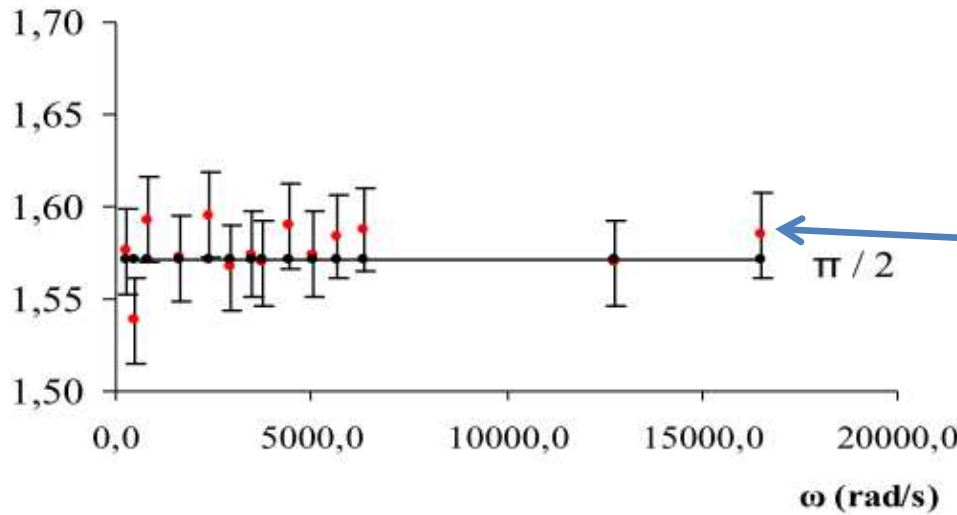
Aumenta muito



# Defasagem x $\omega$

$\Phi_c$  (rad)

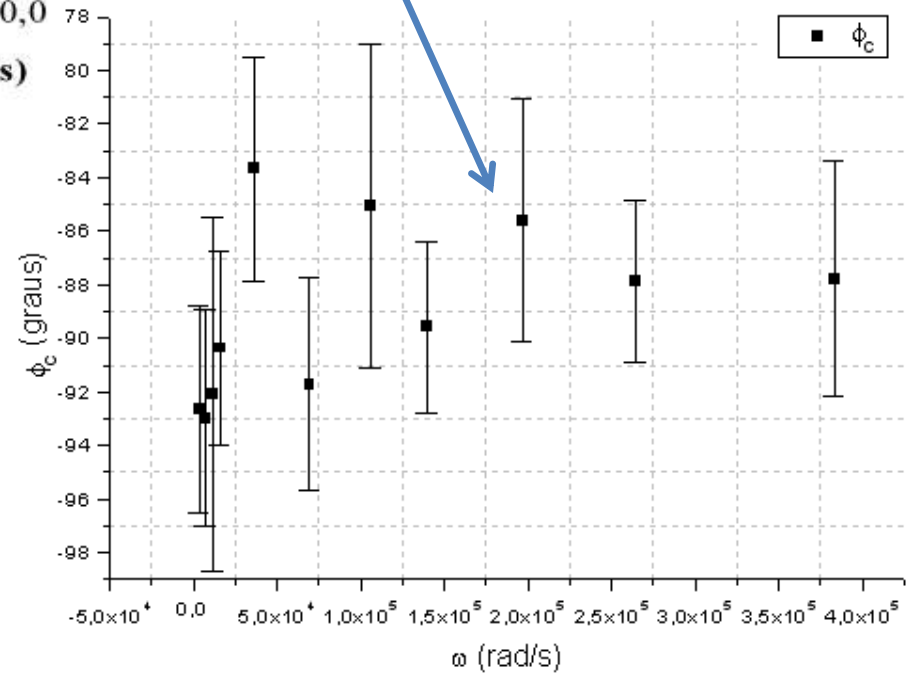
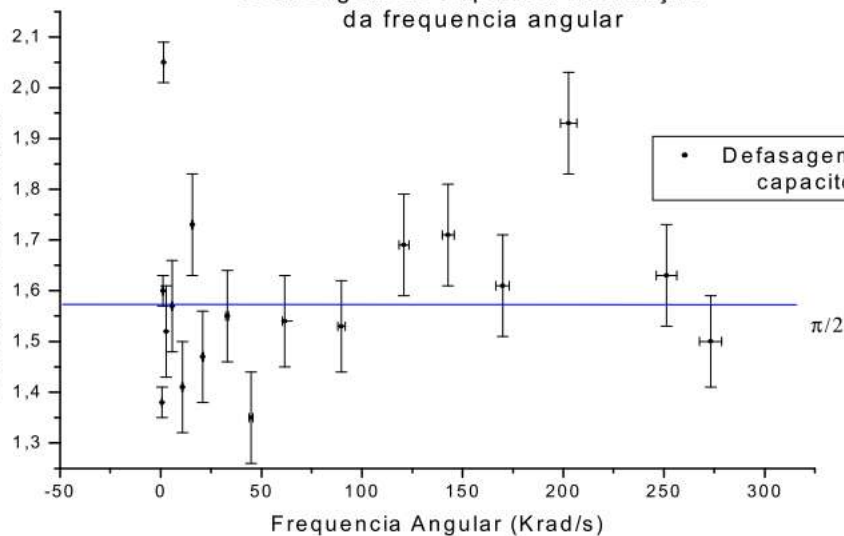
$\Phi_c \times \omega$  (2)



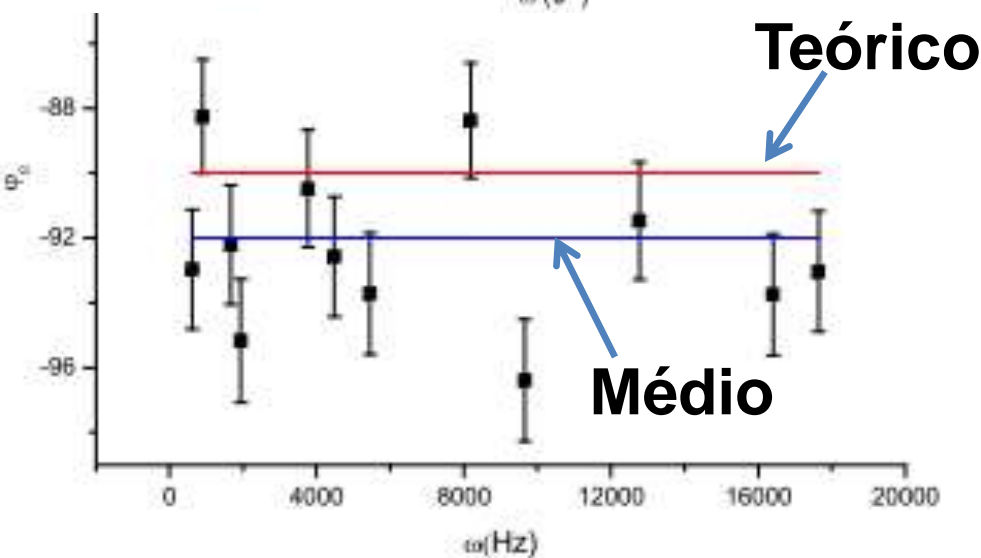
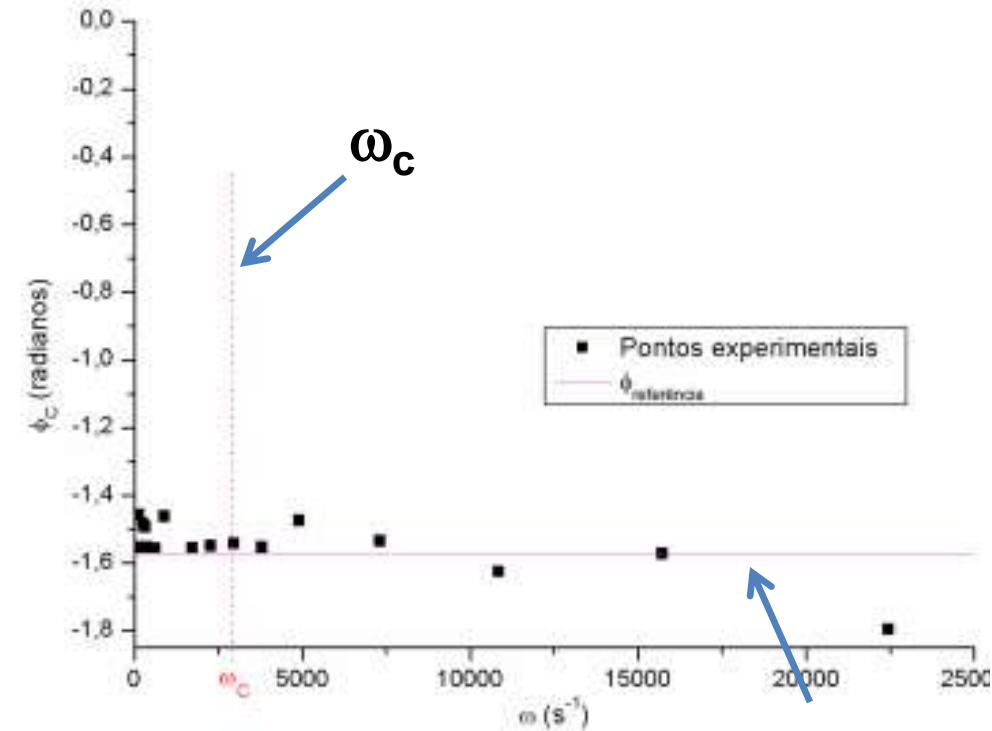
Muitos esqueceram a barra de erro na freqüência!

Defasagem no capacitor (rad)

Defasagem do capacitor em função da frequência angular



# Interessante...

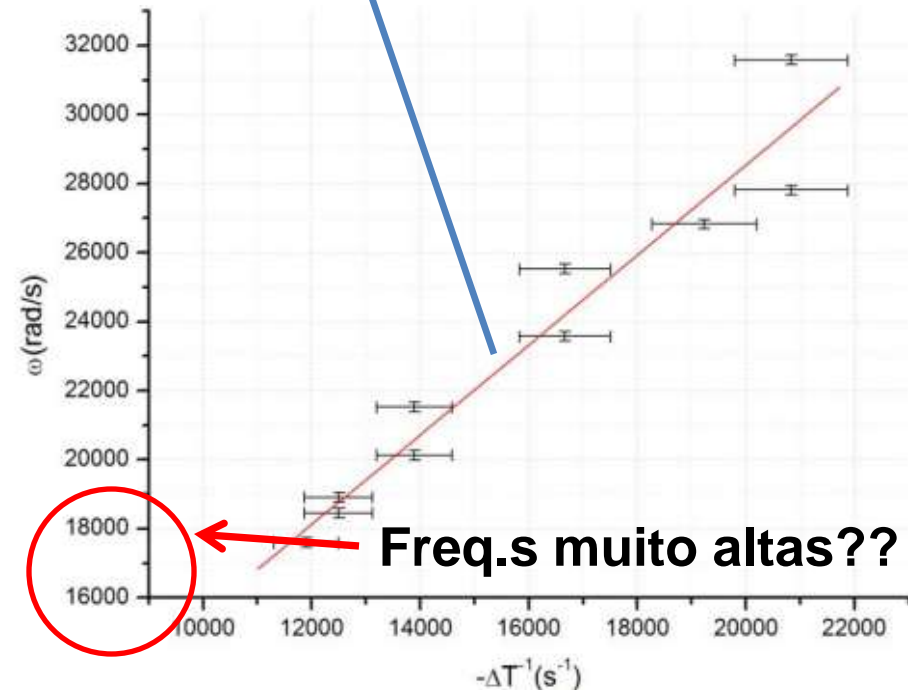


Lembrando que:

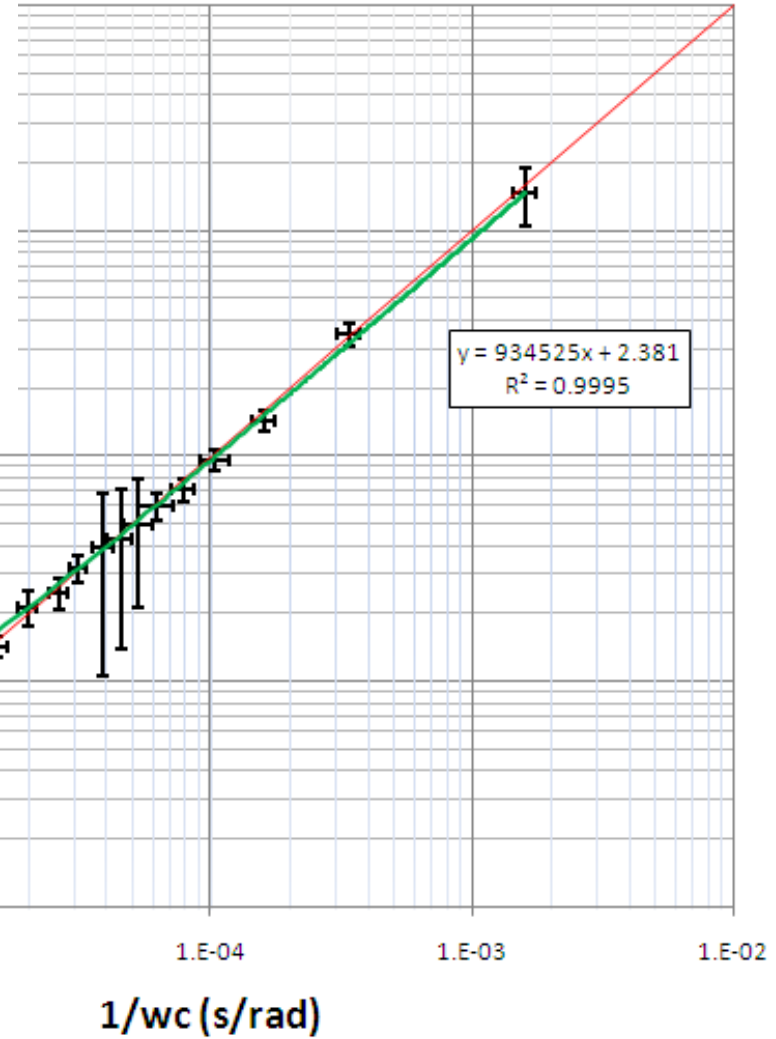
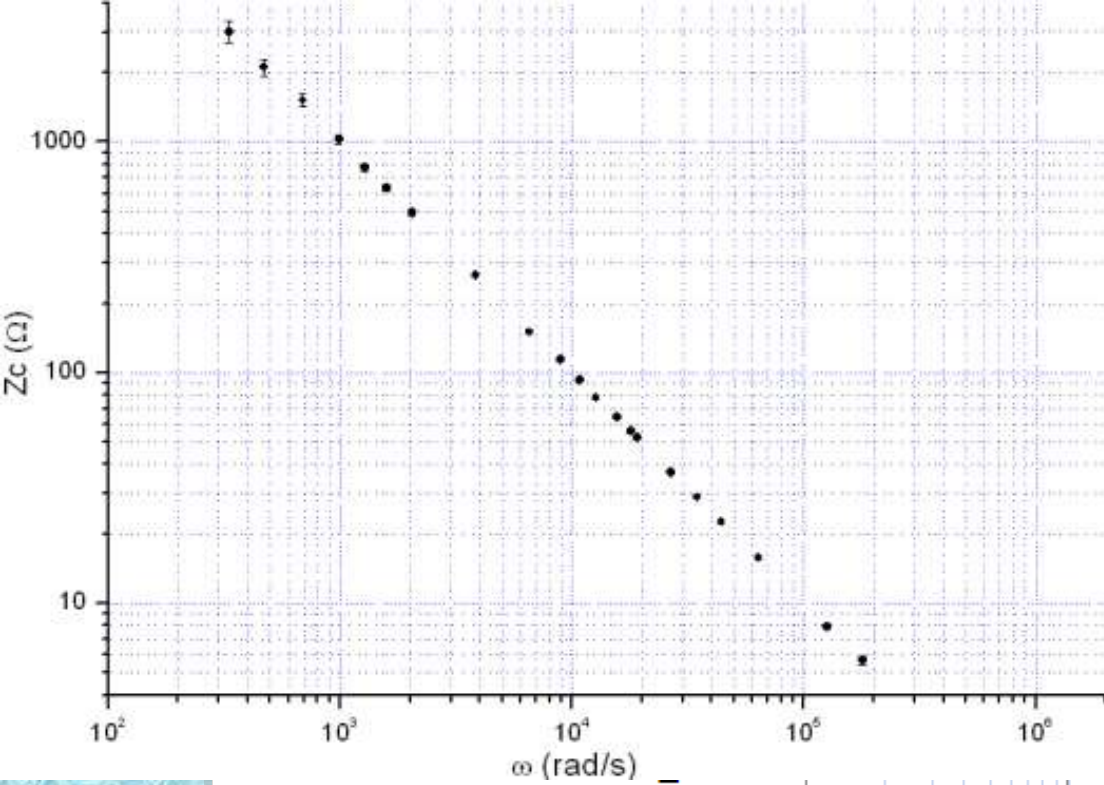
$$-\frac{\pi}{2} \equiv \phi_C = \omega \cdot \Delta T_{C-R}$$

$$\omega = \phi_C (\Delta T_{C-R})^{-1}$$

$\phi_C$  é a inclinação



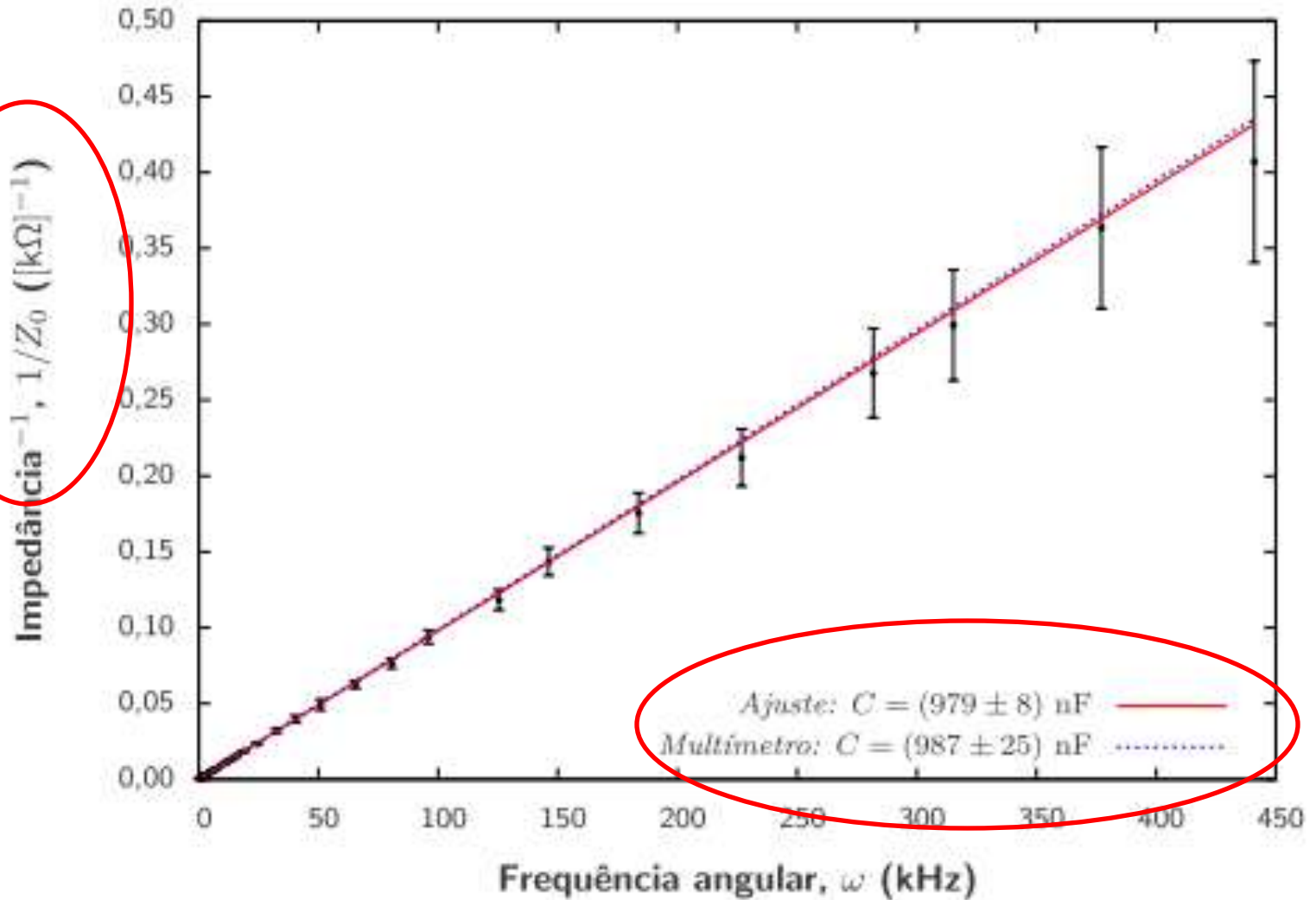
omo apresentar..



Um grupo fez.



# Outra maneira



# Capacitor

- Gráfico de  $Z_C$  experimental em função de  $\omega$ 
  - lembre-se que  $Z = \text{Tensão/corrente} \rightarrow Z = 1/\omega C$
  - Obter o valor da capacitância deste gráfico
- Gráfico de  $\phi_C$  (fase do capacitor) em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente para o capacitor

# Filtro RC

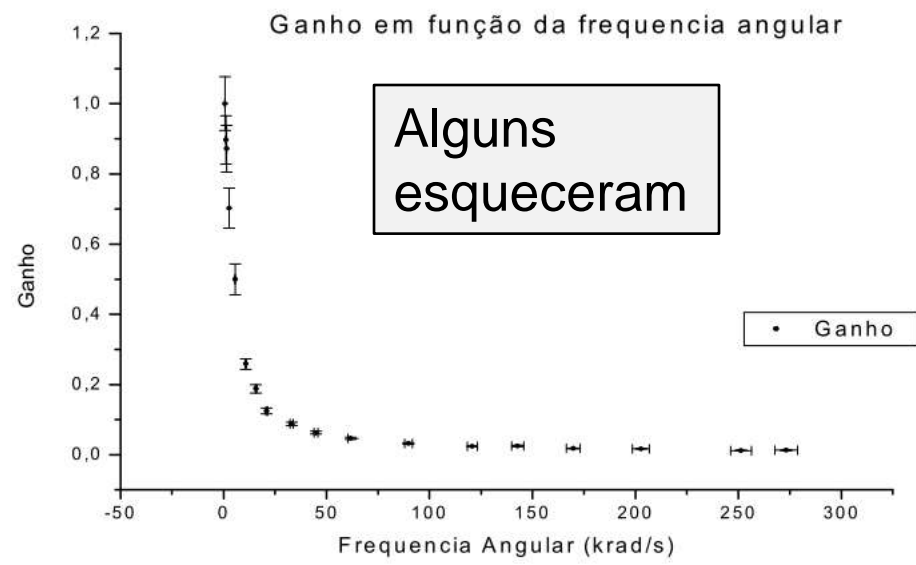
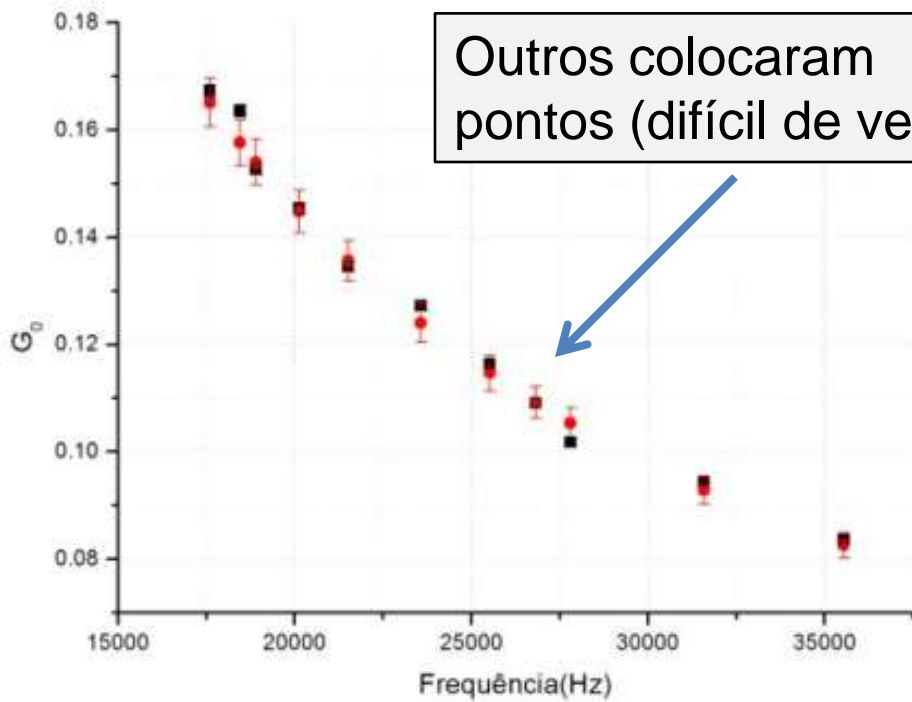
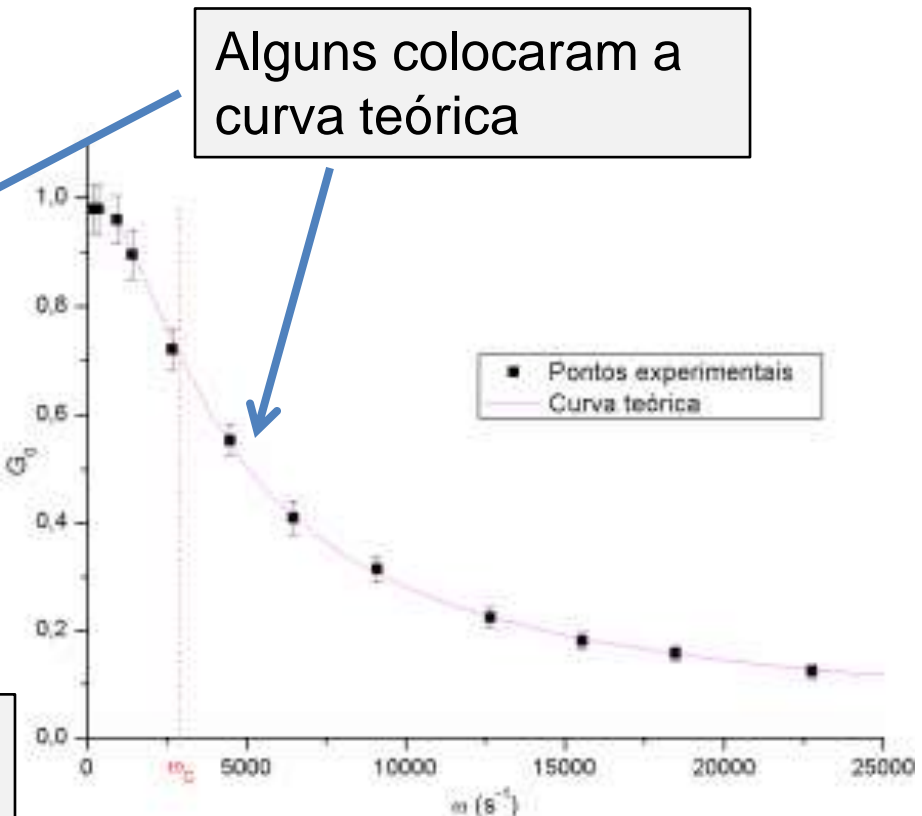
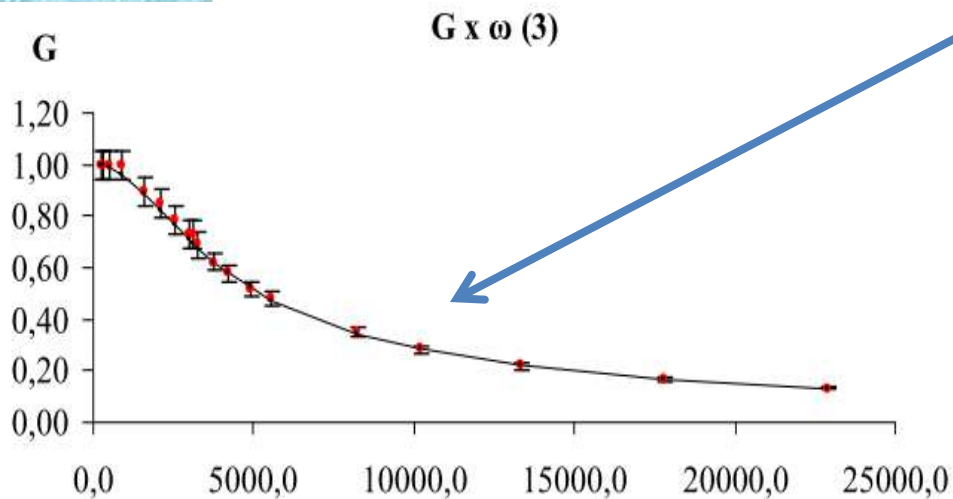
- Gráfico de  $G_0$  em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente
- Gráfico de  $\phi_G$  (fase entre  $V_s$  e  $V_e$ ) em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente

# Integrador

- Mostrar que  $V_s$  é a integral de  $V_e$ 
  - Foto da tela do osciloscópio
  - Inclinação do triângulo é a esperada teoricamente
  - Para quais frequências o circuito é um integrador ?



# Filtro RC

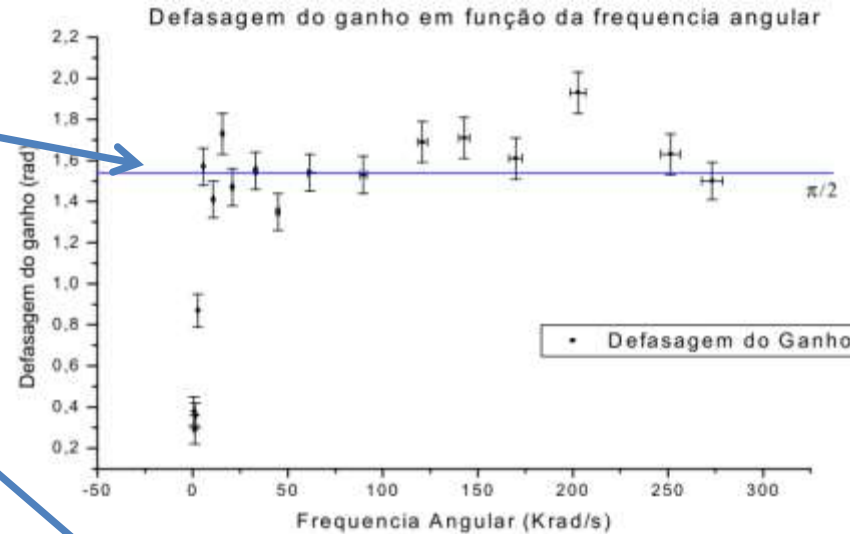


# Defasagem do Ganho

Outros esqueceram da teoria...

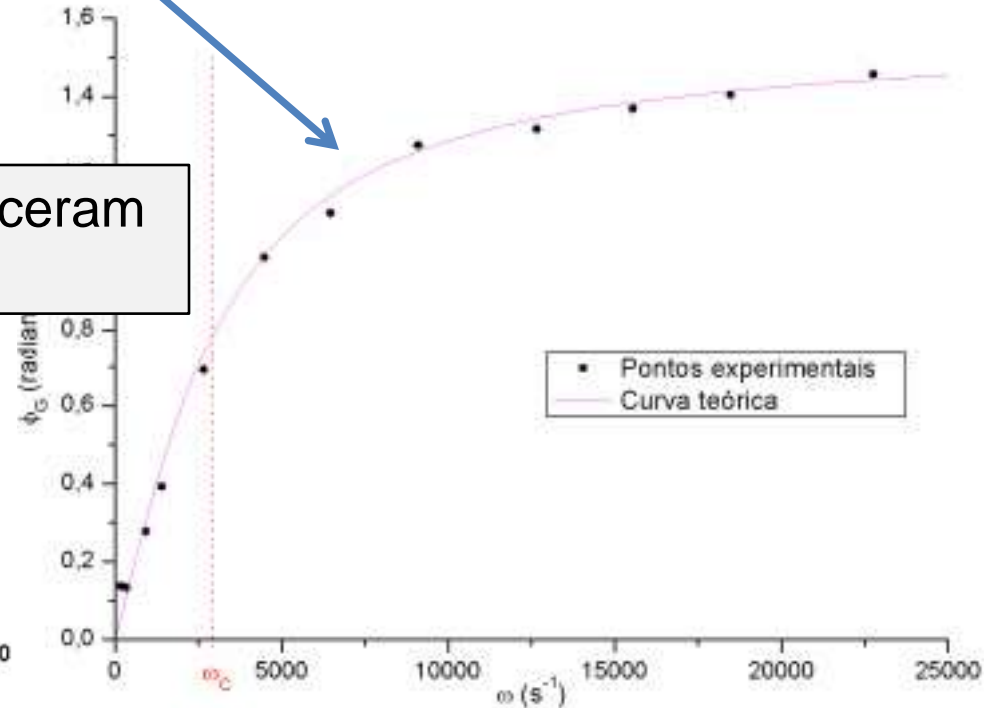
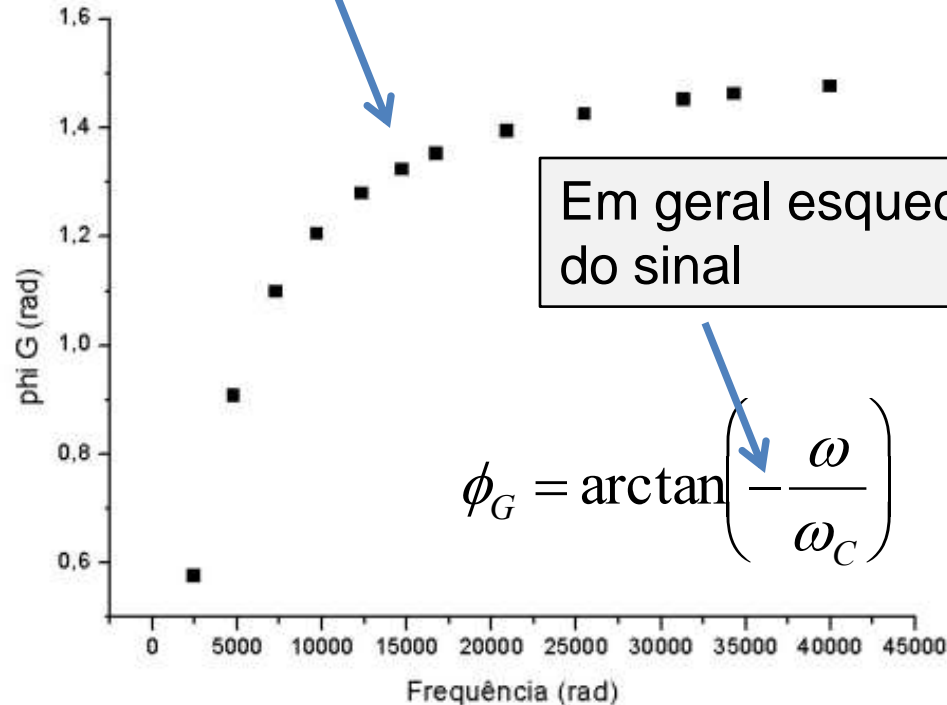
Alguns mediram corretamente e compararam com a teoria.

Outros esqueceram da curva teórica....

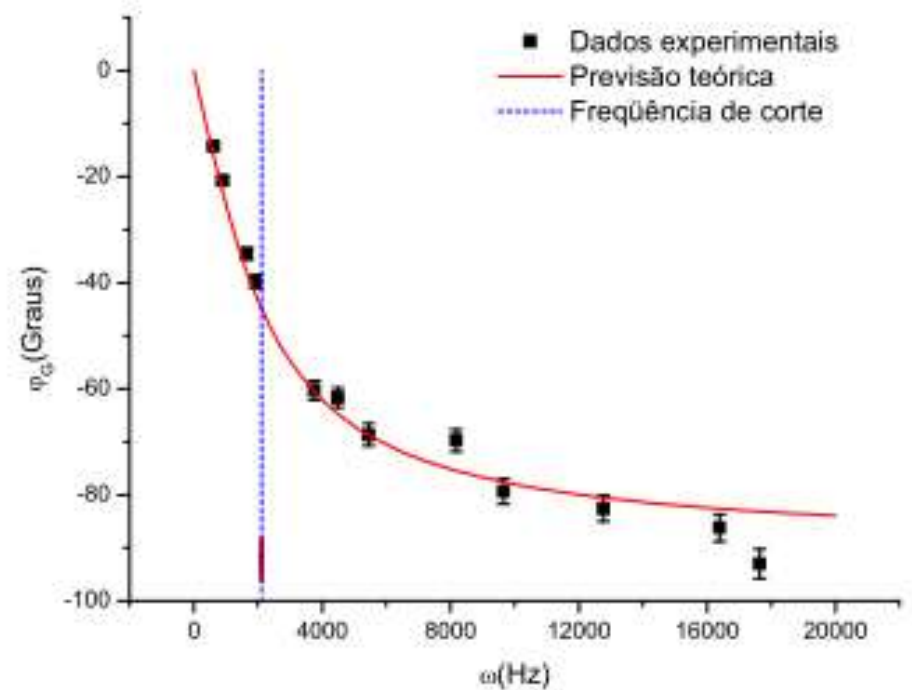
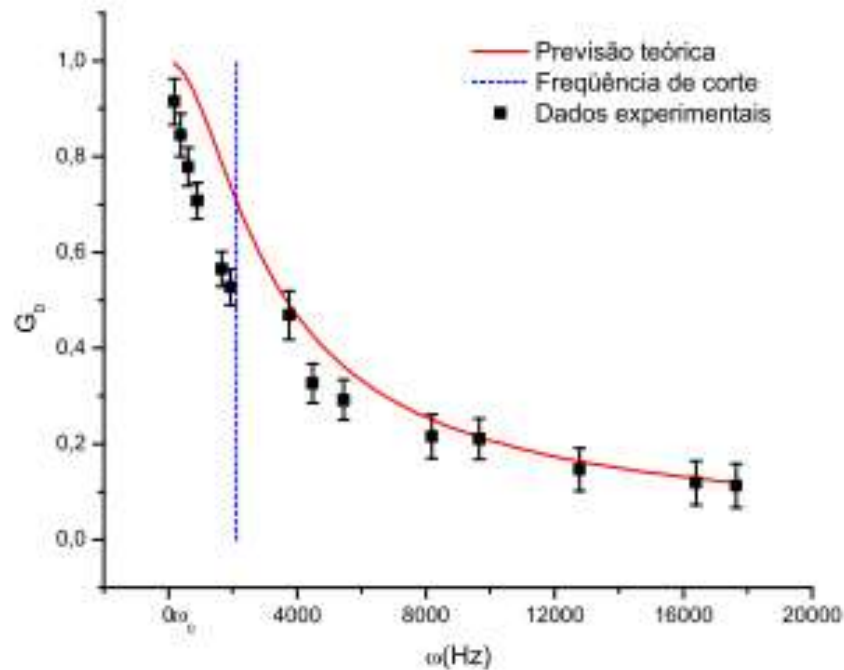


Em geral esqueceram do sinal

$$\phi_G = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_C}\right)$$



# Problemas no ganho



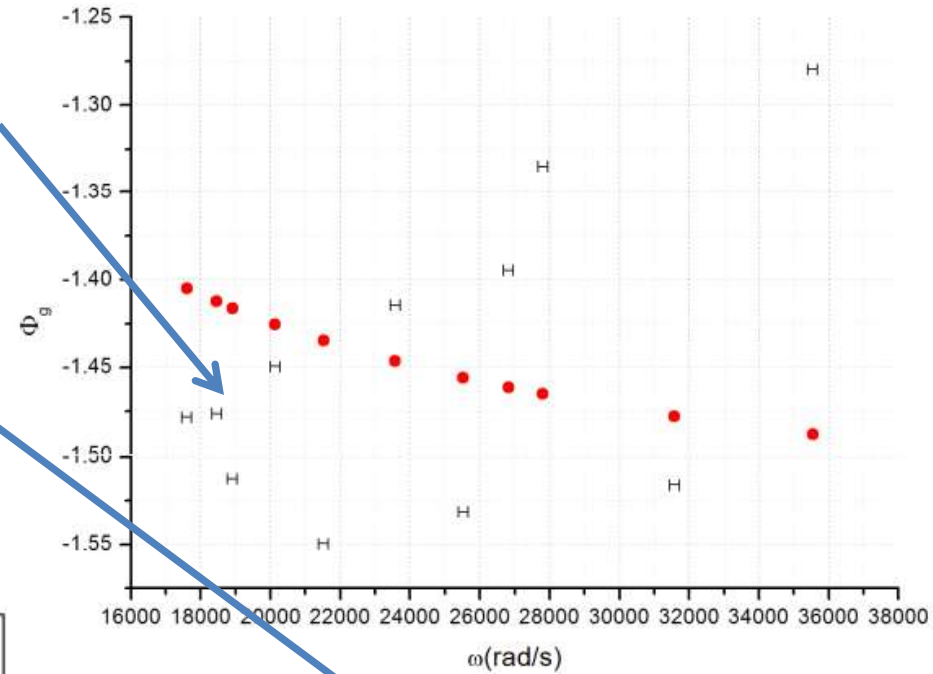


# Problemas na fase

Pontos experimentais aleatórios?

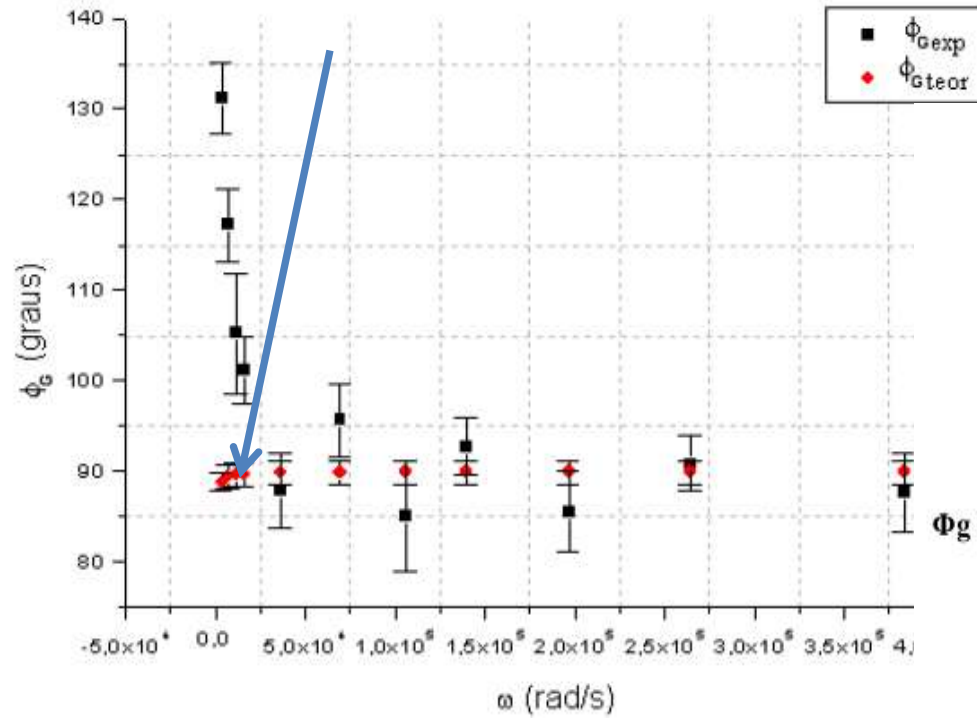
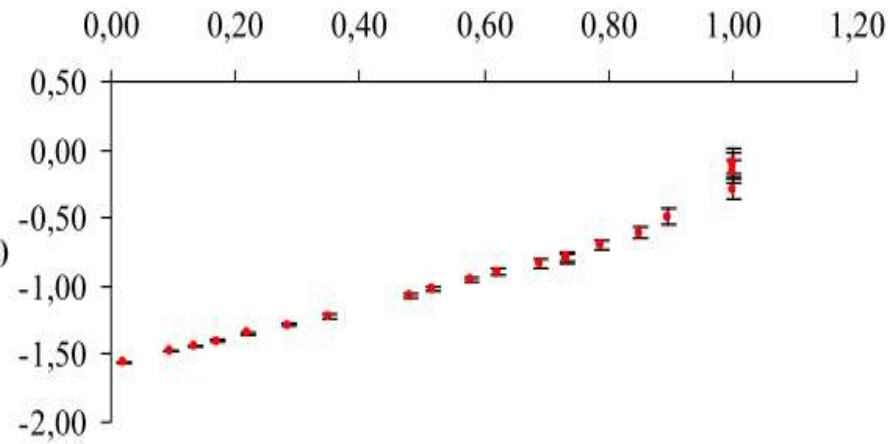
Em funcao do ganho?

Curva teórica não varia?



$\Phi_g \times Go(4)$

Go



# $\omega_c$ experimental

Usando:

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega / \omega_c)^2}}$$

Pode-se calcular  $\omega_c$  pelo ajuste da curva.

Ou então observando quando a curva passa por  $1/\sqrt{2}$

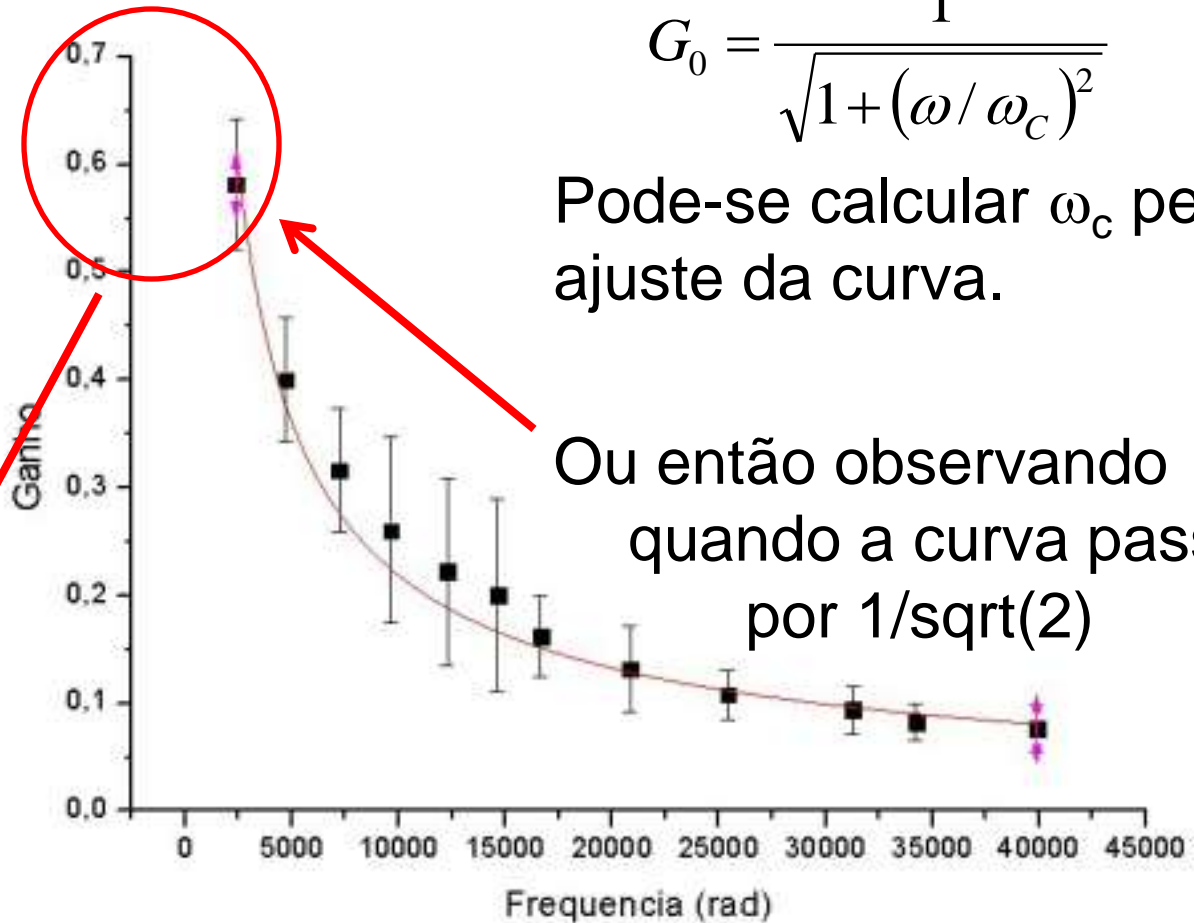


Gráfico 1.3. Ganho do circuito em função da frequência.

Teve grupo que ajustou uma curva aos pontos experimentais... mas não ajustou a eq. correta!

Era necessário medir freq menores.

A equação que melhor representa essa curva é  $y = (165,618 \pm 33,57)(1 + x)^{(-0,72 \pm 0,02)}$ .



# Capacitor

- Gráfico de  $Z_C$  experimental em função de  $\omega$ 
  - lembre-se que  $Z = \text{Tensão/corrente} \rightarrow Z = 1/\omega C$
  - Obter o valor da capacitância deste gráfico
- Gráfico de  $\phi_C$  (fase do capacitor) em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente para o capacitor

# Filtro RC

- Gráfico de  $G_0$  em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente
- Gráfico de  $\phi_G$  (fase entre  $V_s$  e  $V_e$ ) em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente

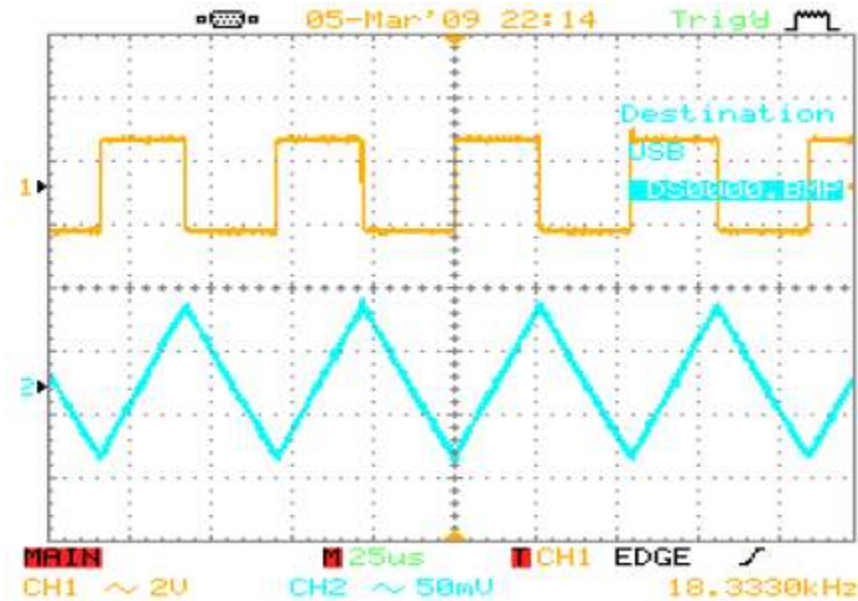
# Integrador

- Mostrar que  $V_s$  é a integral de  $V_e$ 
  - Foto da tela do osciloscópio
  - Inclinação do triângulo é a esperada teoricamente
  - Para quais frequências o circuito é um integrador ?

# Integrador

Alguns mostraram apenas para uma frequência e discutiram os valores limites....

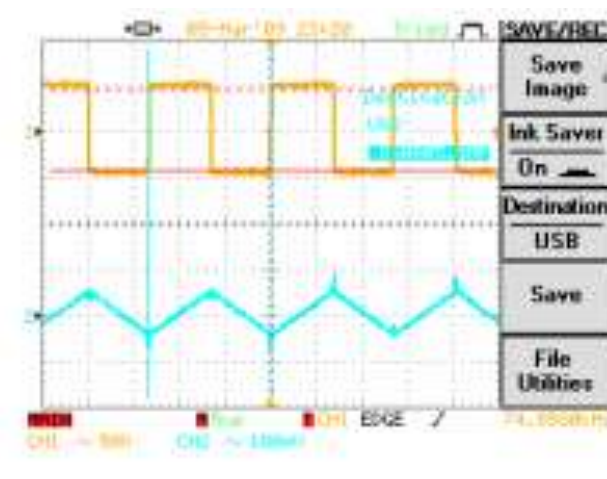
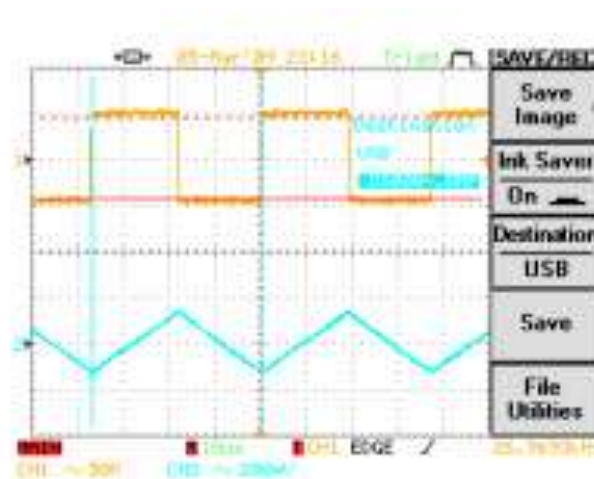
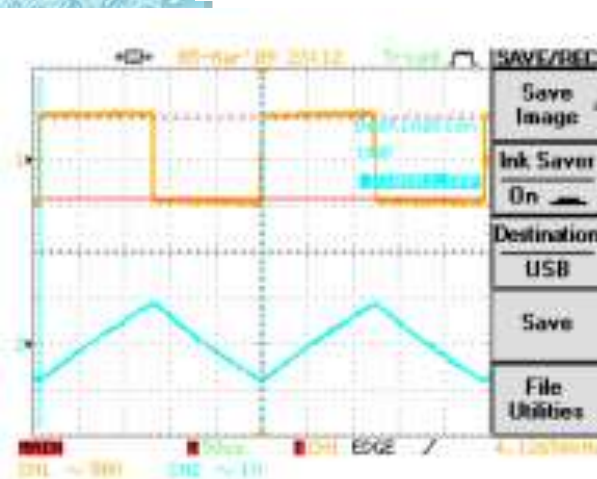
Outros mostraram como a onda triangular se deforma para várias frequências.



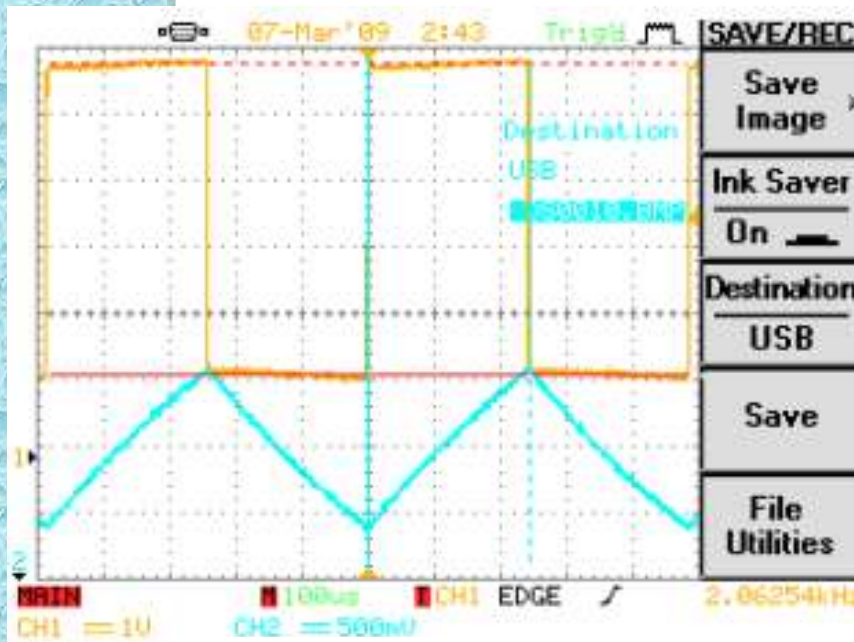
4khz

26khz

75khz



# Integrador

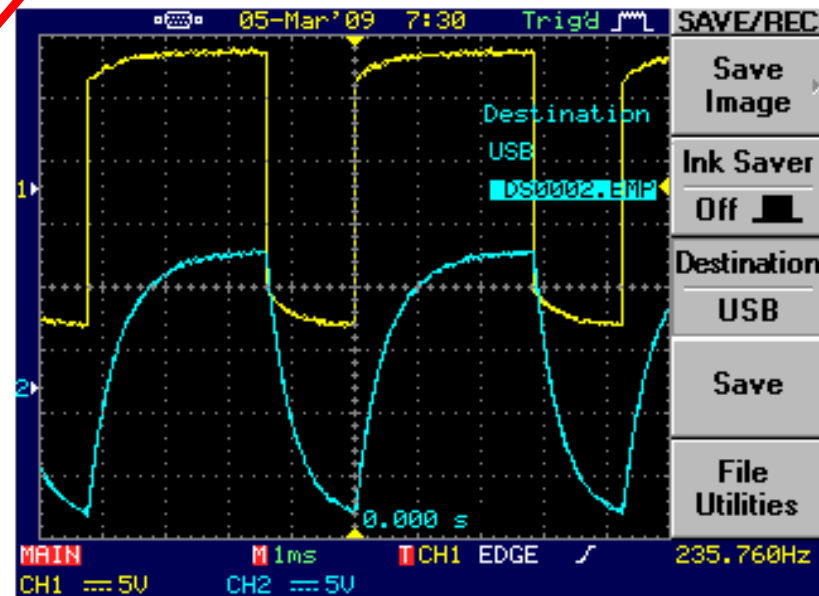
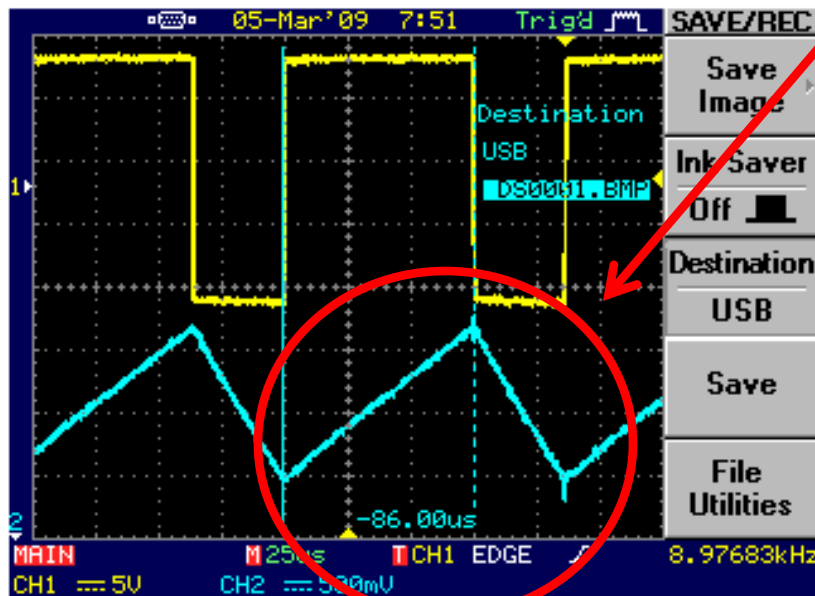


Para frequências baixas realmente não temos um integrador!

Para alta freq as vezes da alguma problema...

9kHz

235Hz



# O que deveria ter sido feito e poucos grupos fizeram....

Como:

$$\hat{V}_s = \frac{1}{RC} \int \hat{V}_e dt$$

Então:

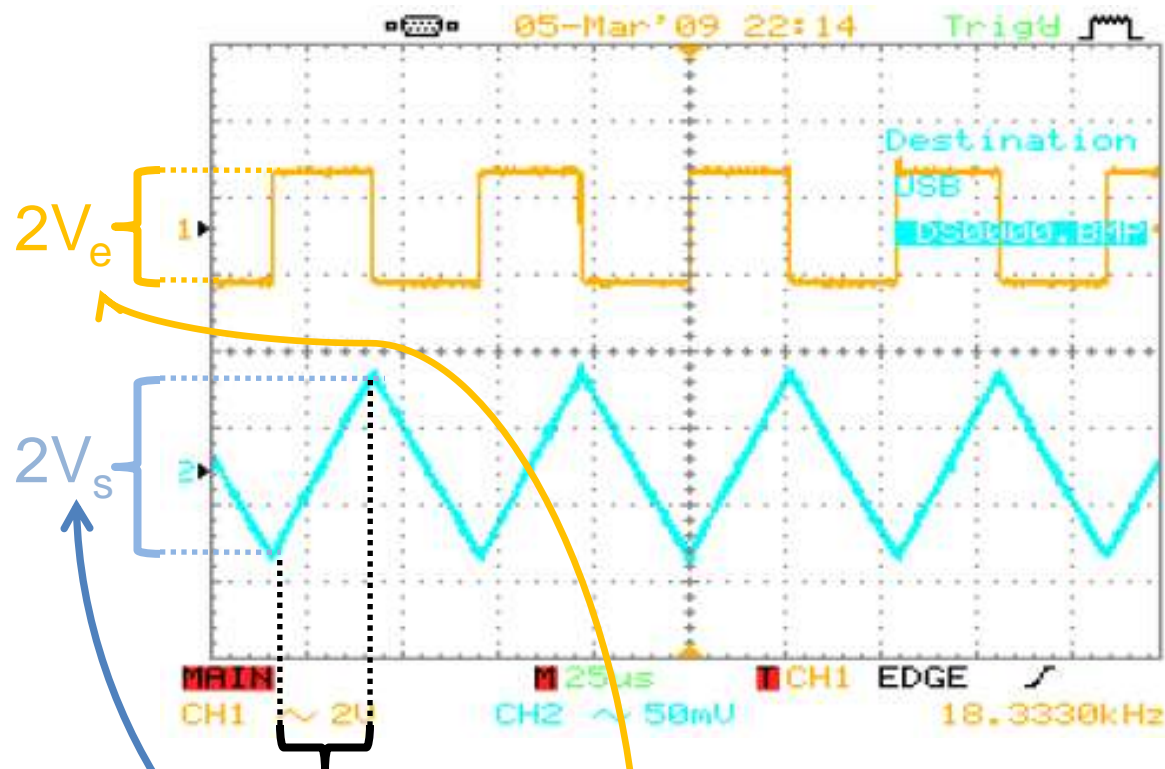
$$\frac{d\hat{V}_s}{dt} = \frac{1}{RC} \hat{V}_e$$

E como:

$$d\phi_s / dt = 0$$

Temos:

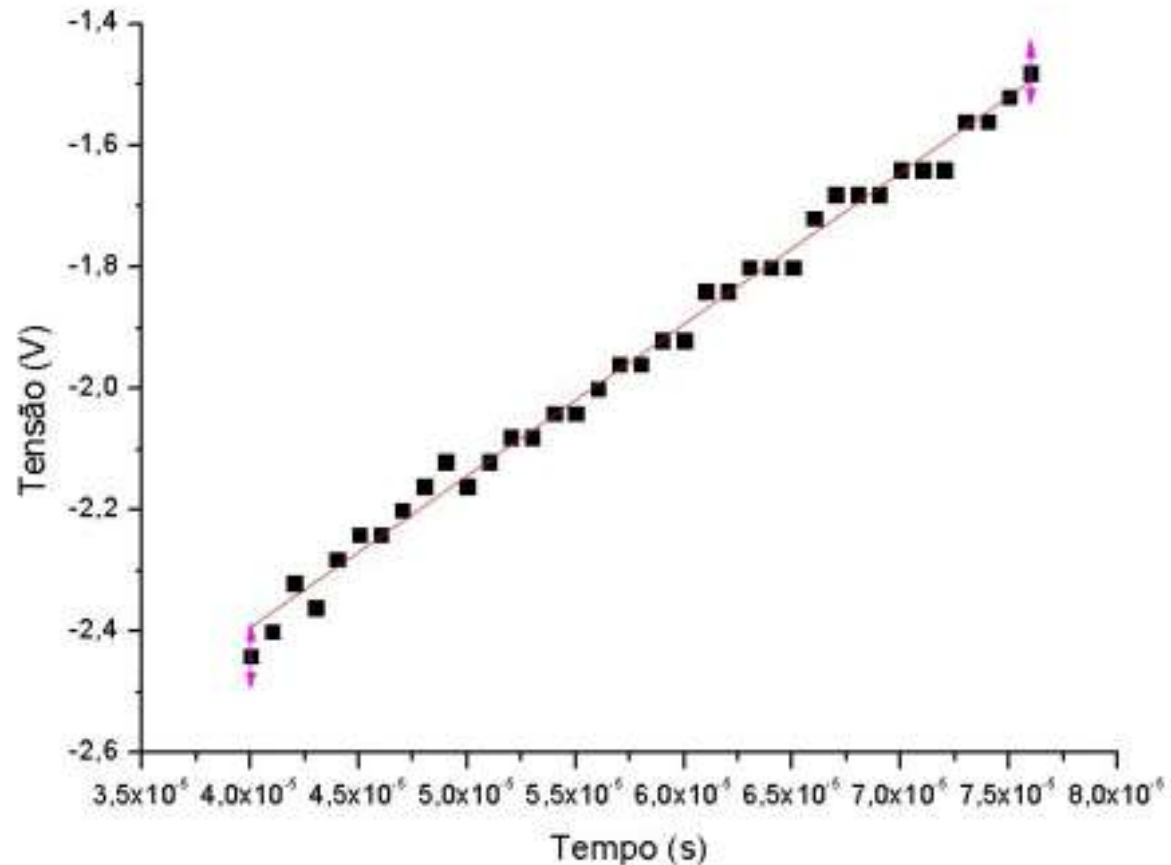
$$\frac{dV_s}{dt} = \frac{1}{RC} V_e \Rightarrow \text{inclinação} = \frac{2V_s}{T/2} = \frac{V_e}{RC}$$



# Interessante

$$y = (2495,97 \pm 36,91)x - (0,339 \pm 0,0022)$$

## Valor do ajuste



Um grupo exportou os dados do sinal triangular e ajustou uma reta para calcular mais precisamente a inclinação!

## Valor “teórico”

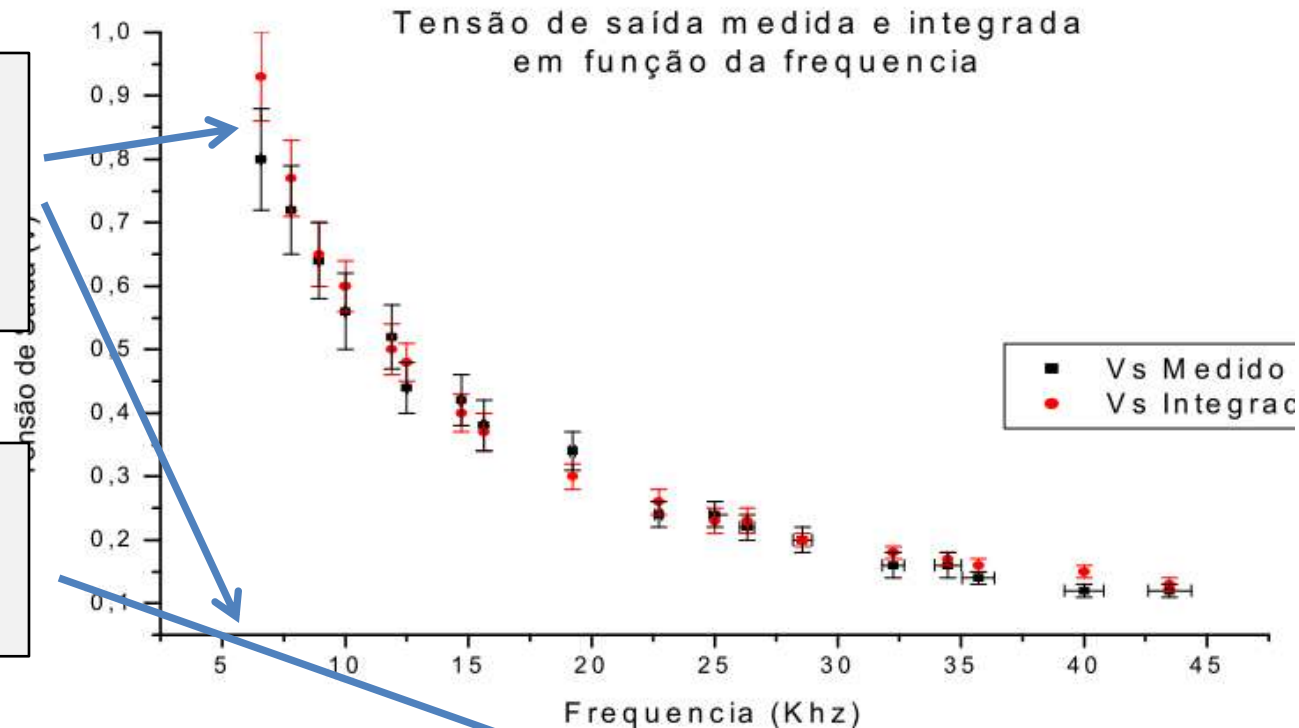
$$c = (2508,259 \pm 12,135)\Omega F^{-1}$$



# Interessante

Tensão de saída medida e calculada (supondo integrador) não 'batem' para baixas freqs.

Outra maneira de olhar, tomando a razão entre as duas...



Veja a tabela abaixo:

$V_e$ (V)	$\sigma V_e$ (V)	$V_s$ (V)	$\sigma V_s$ (V)	$\omega$ (rad/s)	Razão	$\sigma$ Razão
9,600	0,400	2,560	0,080	17689,743	0,927	0,087
9,400	0,400	2,080	0,080	21726,187	0,947	0,266
10,400	0,600	1,400	0,060	33247,601	0,977	0,435
10,000	0,400	0,780	0,040	61612,350	1,021	0,721
10,000	0,400	0,584	0,040	78764,754	0,974	0,939
10,000	0,400	0,400	0,048	126428,370	1,076	0,101
9,800	0,400	0,300	0,036	164366,871	1,064	0,122
9,600	0,400	0,140	0,040	378345,773	1,187	0,183

Tabela 1.0 – Valores de entrada e saída e suas respectivas incertezas em Volts, valores de  $\omega$  em rad/s e a razão entre o  $V_s$  experimental e o  $V_s$  teórico e suas respectivas incertezas.

# Interessante

O gráfico acima mostra que para valores bem altos de  $w$ , o ganho se comporta como a função  $w_c/w$ . Vemos que os dados começam a se comportar dessa forma a partir de valores de  $w$  próximos a  $2,0 \times 10^4$  rad/s que é entre 6 e 7 vezes o valor da frequência de corte. Percebe-se então que a partir destes valores pode-se considerar  $w \gg w_c$ .

GRÁFICO 4: Gráfico de  $G_0 \times \omega$

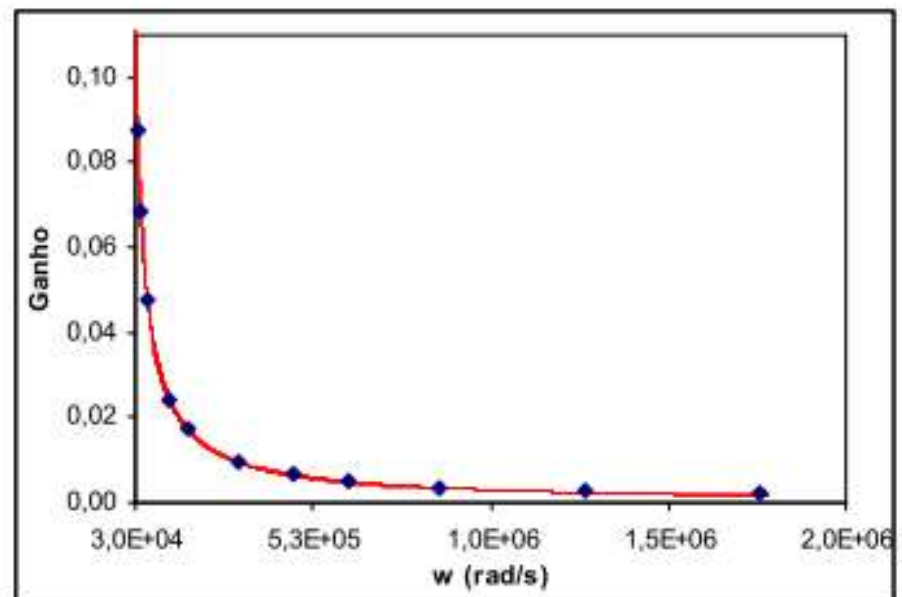
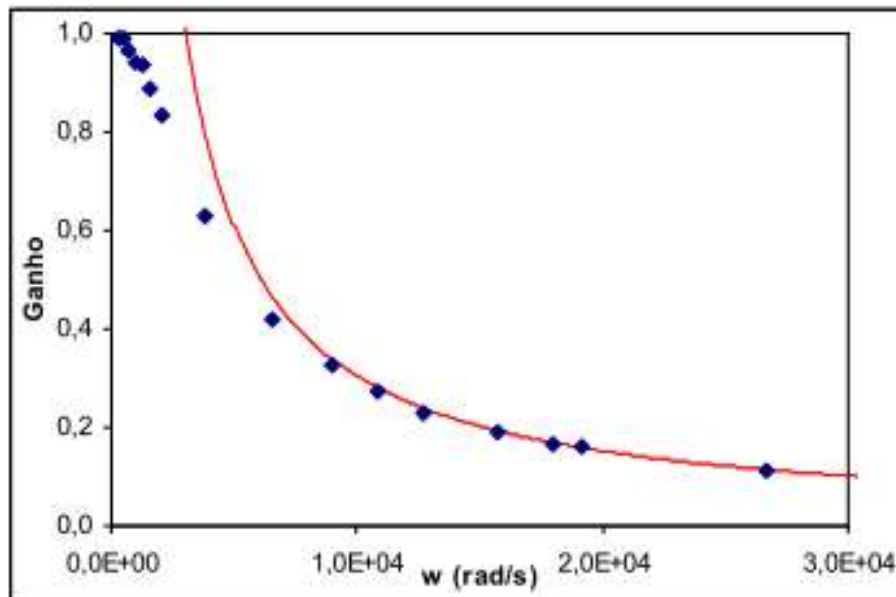


Gráfico 4: Gráfico de  $G_0 \times \omega$ .  
A função em vermelho é a função  $w_c / w$ .

# Dedução Teórica

A onda quadrada (tensão de entrada) pode ser descrita pela equação (6), onde  $n$  é um número inteiro:

$$V_E(t) = \begin{cases} V_{pe} & \text{para } nT \leq t \leq (n + \frac{1}{2}) T \\ -V_{pe} & \text{para } (n + \frac{1}{2}) T \leq t \leq (n + 1) T \end{cases} \quad (6)$$

A partir disto é fácil ver que a integral em um período é nula, ou seja, vale que:

$$\int_0^t V_E(t') dt' = \int_0^{nT} V_E(t') dt' + \int_{nT}^t V_E(t') dt' = \int_{nT}^t V_E(t') dt'$$

Dessa forma, fazendo a integral em um período qualquer de  $V_E$ , temos a integral de toda a onda. Utilizando (6), para  $nT \leq t \leq (n + 1)T$ , temos:

$$\int_0^t V_E(t') dt' = \int_{nT}^t V_E(t') dt' = \begin{cases} V_{pe}(t - nT) & \text{para } nT \leq t \leq (n + \frac{1}{2}) T \\ V_{pe} \frac{T}{2} - V_{pe}(t - nT) & \text{para } (n + \frac{1}{2}) T < t < (n + 1) T \end{cases}$$

Ou seja, a saída esperada é uma onda triangular com inclinação  $\mu = \frac{1}{RC} V_{pe}$ , valor máximo de  $\frac{1}{RC} \frac{T}{2} V_{pe}$  e mínimo 0. Assim, o valor de pico da tensão de saída é dado por

$$V_{ps} = \frac{1}{RC} \frac{T}{2} V_{pe} = \frac{1}{2} \mu T$$

# Esta Semana...

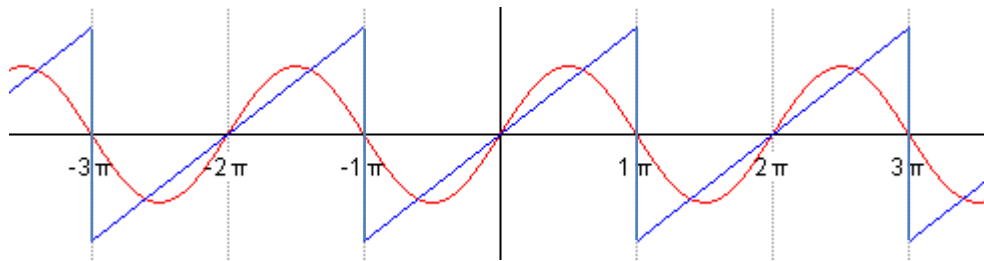


# Motivação

- A medida do Ganho  $\times \omega$  do circuito RC, semana passada, foi bastante cansativa
  - Ajustar frequência
  - Medir  $V_e$
  - Medir  $V_c$
  - Repetir procedimento para cada frequência
  - Pelo menos 1 hora de tomada de dados
- Que tal fazer a mesma medida sem precisar variar a frequência e em 5 minutos?
  - Fundamentos teóricos e novos métodos de análise

# Séries de Fourier

- Joseph Fourier introduziu séries infinitas de funções para resolver a equação de transferência de calor em uma placa de metal.
- Não havia solução geral, apenas particulares para fonte de calor senoidal. A idéia de Fourier foi modelar uma fonte de calor complicada como uma superposição (ou combinação linear) de simples senos ou cossenos.



(1768–1830)



# Séries de Fourier

- Joseph Fourier, paper submetido em 1807
  - Referees: Lagrange, Laplace, Malus e Legendre
  - Funções trigonométricas podem ser combinadas de tal forma a representar qualquer função matemática

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- As constantes  $a_n$  e  $b_n$  podem ser obtidas a partir de:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$



# Séries de Fourier

Hoje em dia, usamos formalismos mais abrangentes:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

Use a fórmula de Euler e substitua na expressão anterior  
 $e^{jx} = \cos x + j \sin x$

As constantes  $a_n$  e  $b_n$  da expressão tradicional podem ser obtidas como:

$$a_n = c_n + c_{-n}, \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots$$

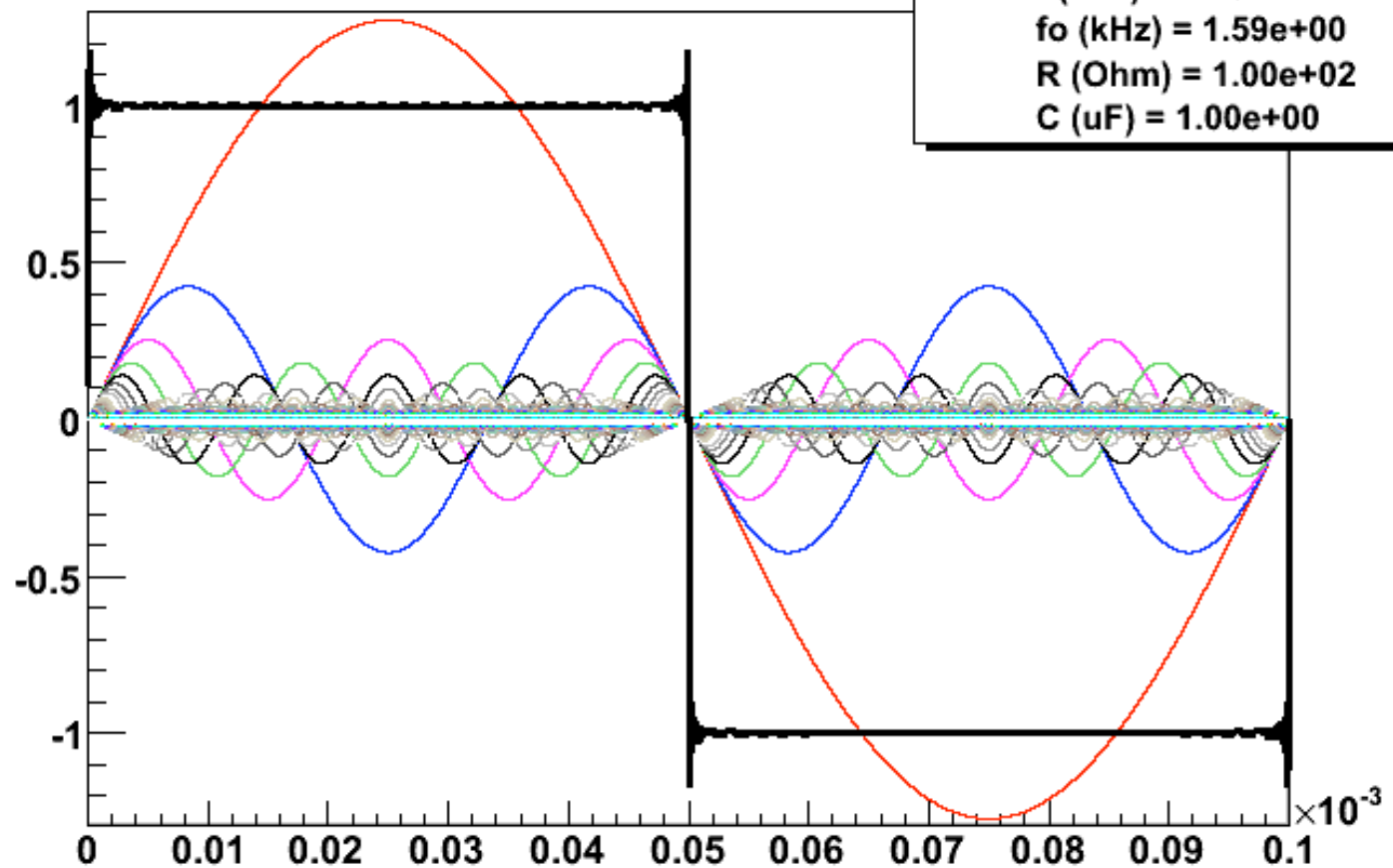
$$b_n = j(c_n - c_{-n}), \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots$$



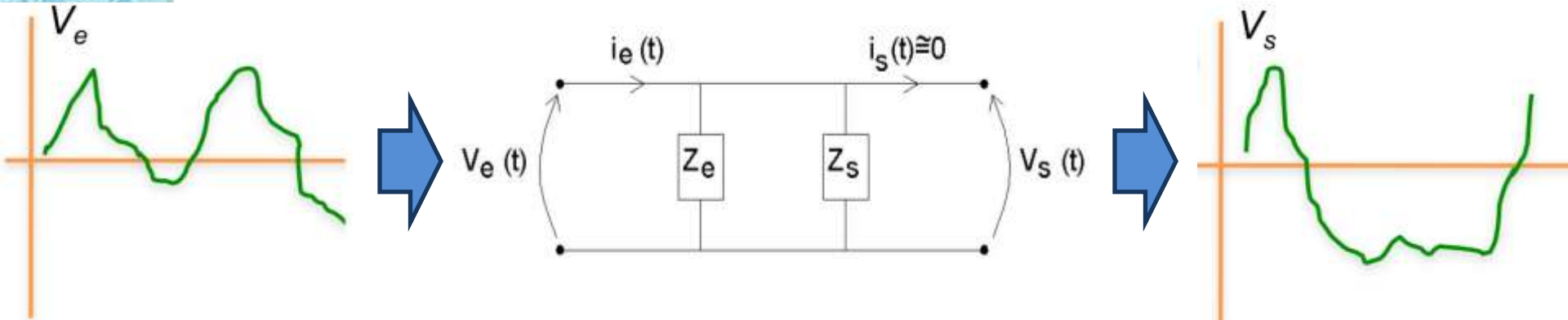
# Exemplo: Onda Quadrada

$$V(t) = V_0 \frac{4}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$

Onda quadrada N = 500

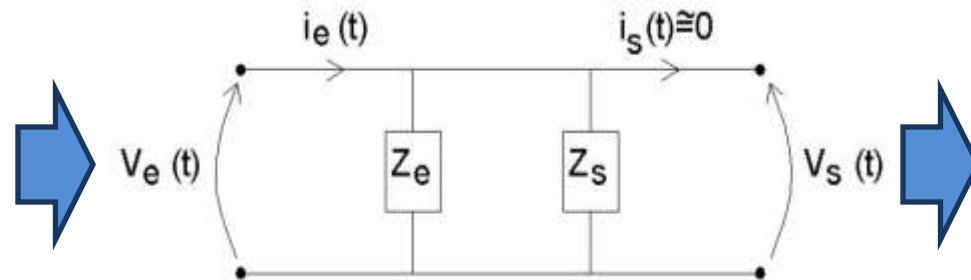
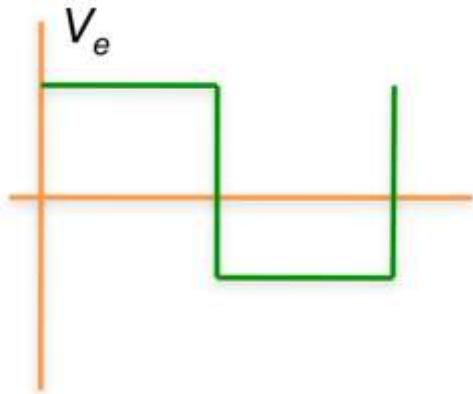


# O que o circuito faz no sinal?



$$V_e = \begin{cases} V_1^s \sin(\omega_1 t) + \\ V_1^c \cos(\omega_1 t) + \\ V_2^c \sin(\omega_2 t) + \\ V_2^c \cos(\omega_2 t) + \\ \dots + \\ V_N^s \sin(\omega_N t) + \\ V_N^c \cos(\omega_N t) \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} G_i = G(\omega_i, R, C) \\ \phi_i = \phi(\omega_i, R, C) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad V_s = \begin{cases} G_1 V_1^s \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \\ G_1 V_1^c \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \\ G_2 V_2^c \sin(\omega_2 t + \phi_2) + \\ G_2 V_2^c \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \\ \dots + \\ G_N V_N^s \sin(\omega_N t + \phi_N) + \\ G_N V_N^c \cos(\omega_N t + \phi_N) \end{cases}$$

# Exemplo: Onda quadrada



?

$$V_e = \begin{cases} \frac{4V_0}{\pi} \sin(\omega t) + \\ \frac{4V_0}{3\pi} \sin(3\omega t) + \\ \frac{4V_0}{5\pi} \sin(5\omega t) + \\ \dots \end{cases}$$



$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega / \omega_c)^2}}$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}(-\omega / \omega_c)$$

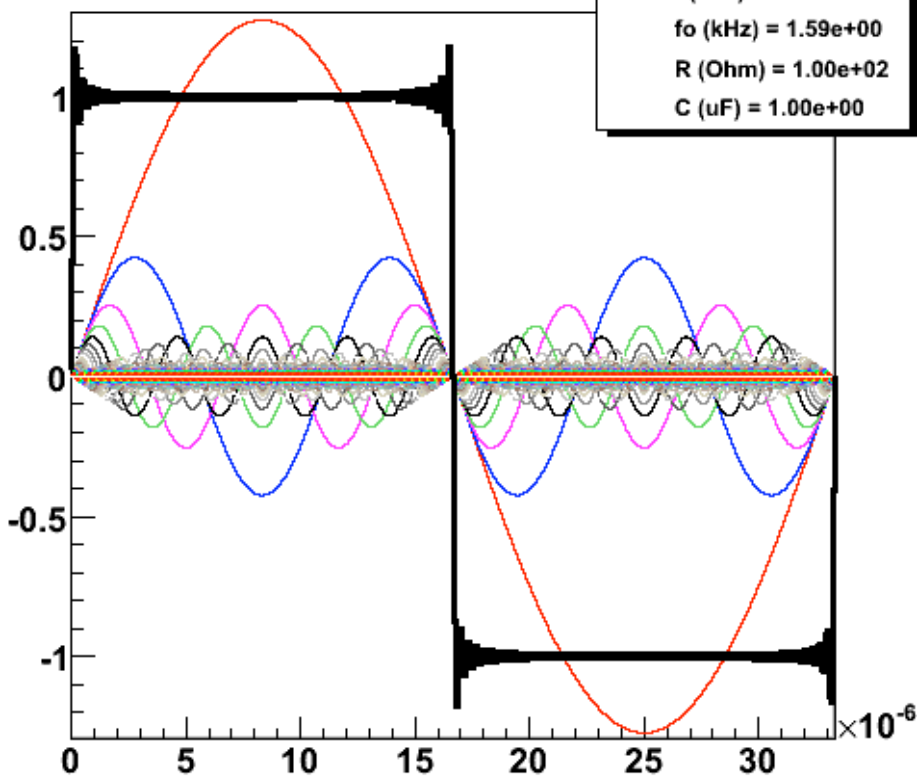


$$V_s = \begin{cases} G_\omega \frac{4V_0}{\pi} \sin(\omega t + \phi_\omega) + \\ G_{3\omega} \frac{4V_0}{3\pi} \sin(3\omega t + \phi_{3\omega}) + \\ G_{5\omega} \frac{4V_0}{5\pi} \sin(5\omega t + \phi_{5\omega}) + \\ \dots \end{cases}$$

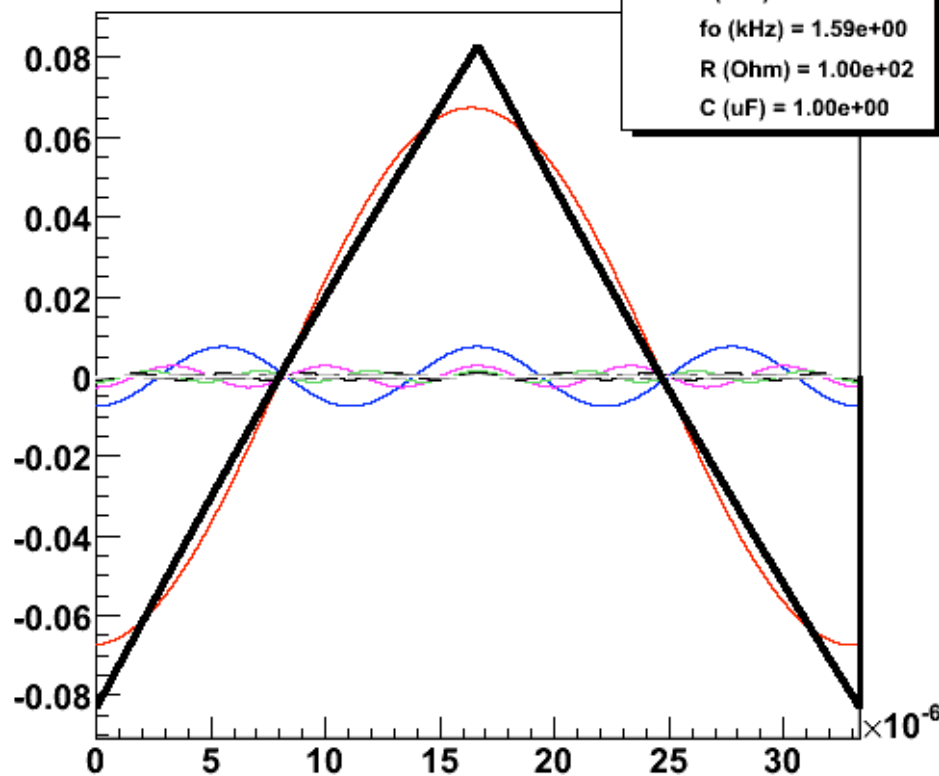
# Filtro RC ( $R=1, C=1\mu F$ ) $F_c \sim 1.5\text{kHz}$

30000Hz

Onda quadrada N = 100



Onda quadrada apos filtro RC N = 100



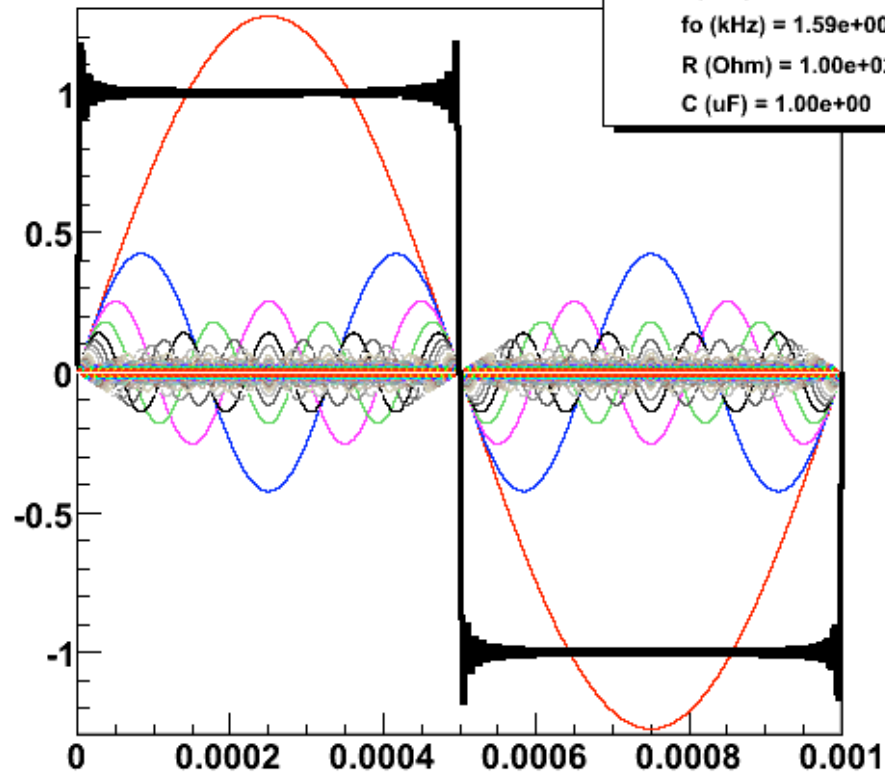
# Como Analisar as Frequências de um Sinal

- Análise de Fourier ou transformada de Fourier
  - É um gráfico no qual o eixo-X representa a frequência da componente de Fourier e o eixo-Y mostra a amplitude daquela componente
  - Deste modo pode-se ver claramente qual a contribuição de cada harmônica para o sinal final e podemos projetar os circuitos com o mínimo de interferência
  - Abre inúmeras possibilidades para tratamento de sinais e imagens.
- Métodos numéricos de obtenção para sinais discretos
  - FFT " Fast Fourier Transform

# Exemplo: Onda Quadrada

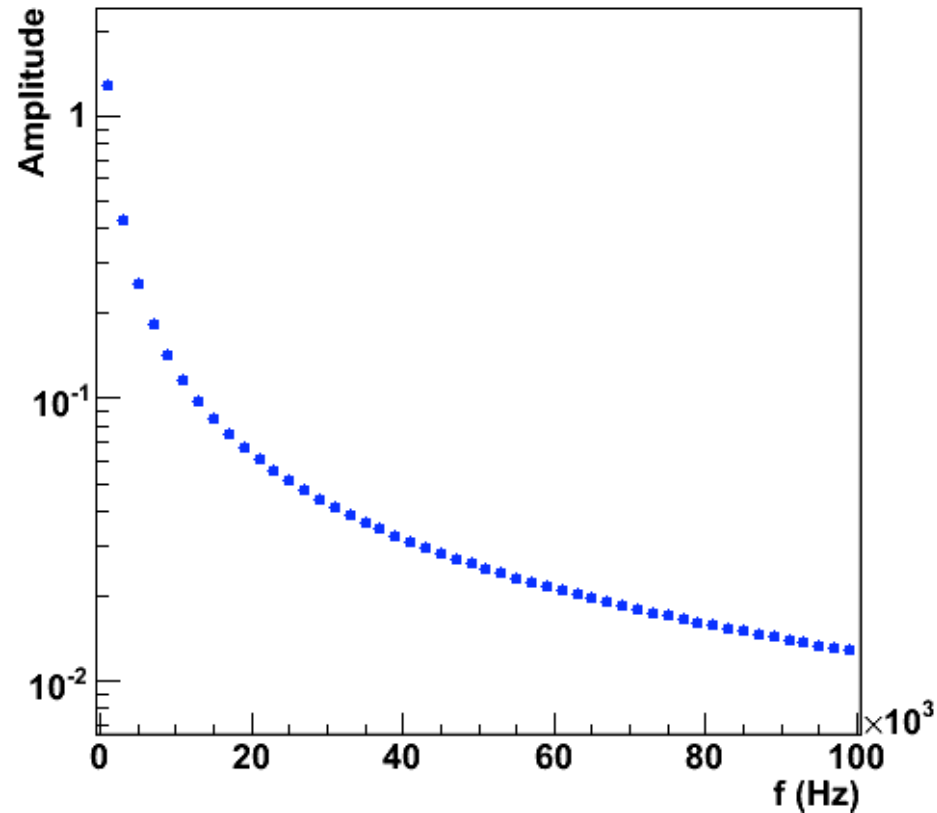
## Sinal

Onda quadrada N = 100



## Transformada de Fourier Espectro de amplitude

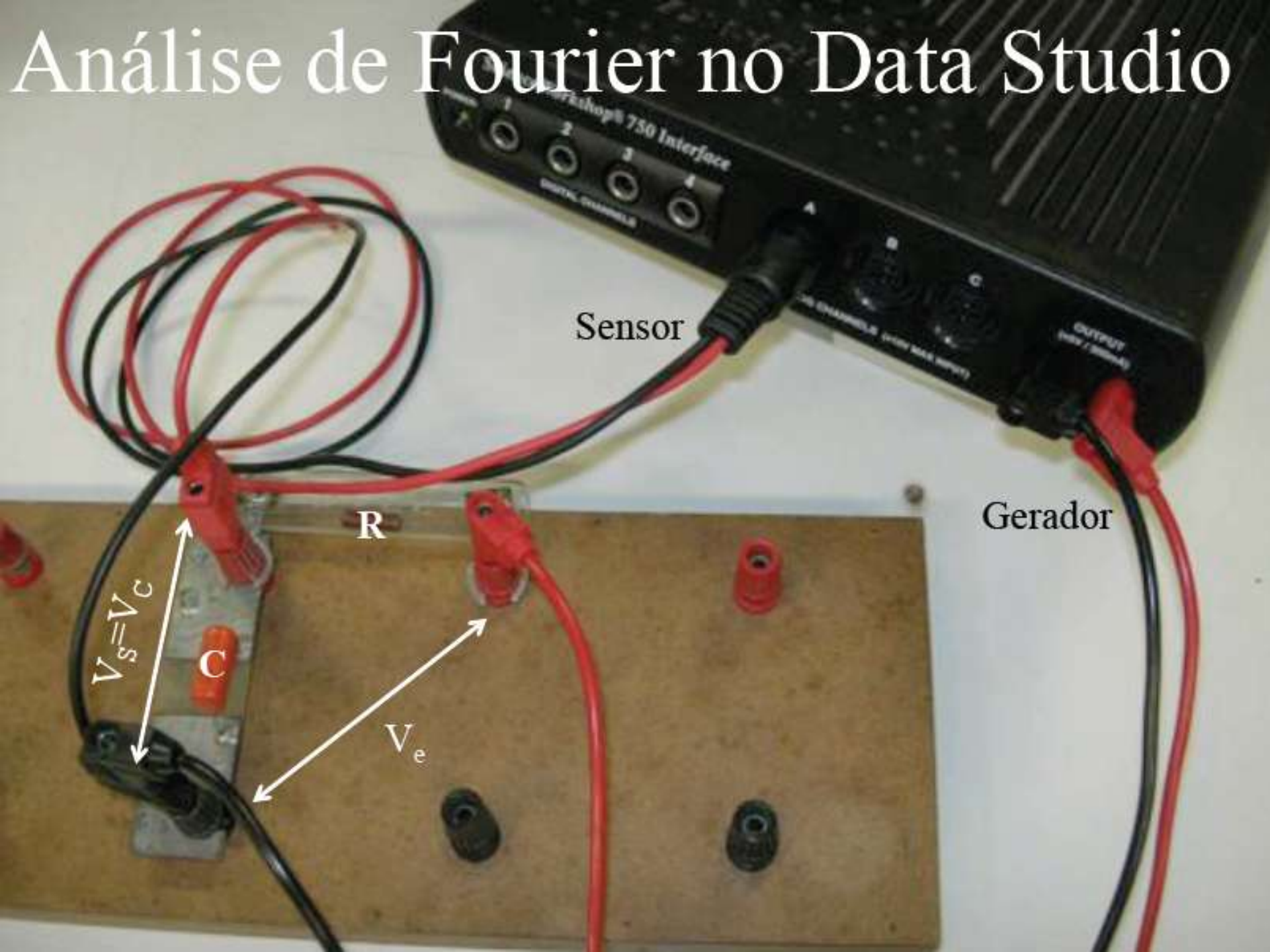
FFT Onda quadrada



# Objetivos da Semana

- Fazer análise de Fourier experimental usando o sinal do DataStudio
  - Onda senoidal (comparar com teoria)
  - Onda quadrada (comparar com teoria)
  - Onda triangular (comparar com teoria)
- Fazer análise de Fourier experimental usando o sinal de saída do filtro RC:
  - Onda triangular (alta freq.)
  - Obter a curva de ganho (baixa freq.)
  - Comparar tudo com os resultados anteriores

# Análise de Fourier no Data Studio



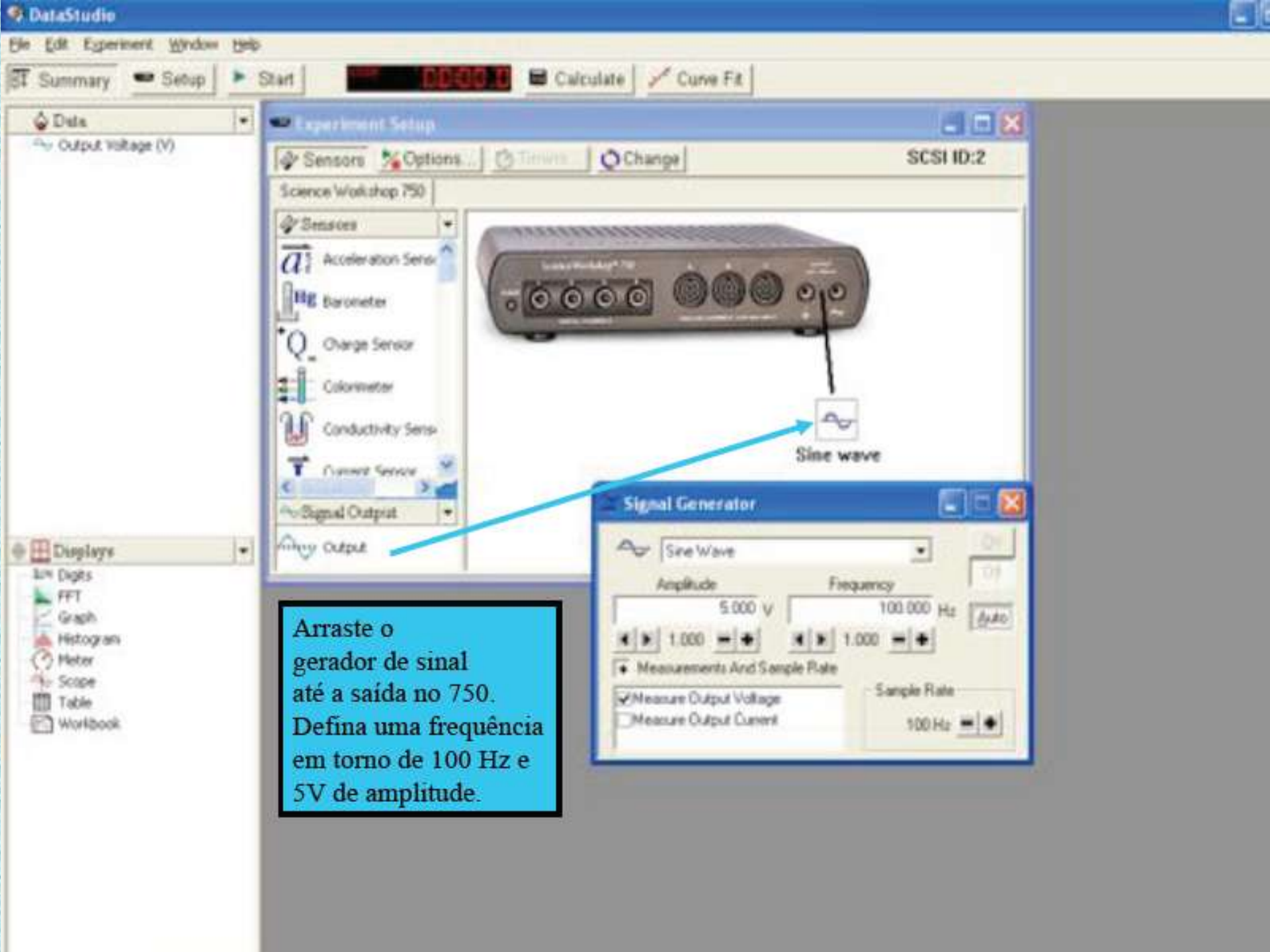


Ligue seu osciloscópio para controlar se a saída do 750 é de fato o que foi selecionado via software.

1) Ligue a interface PASCO 750 na tomada. Veja o LED power on.

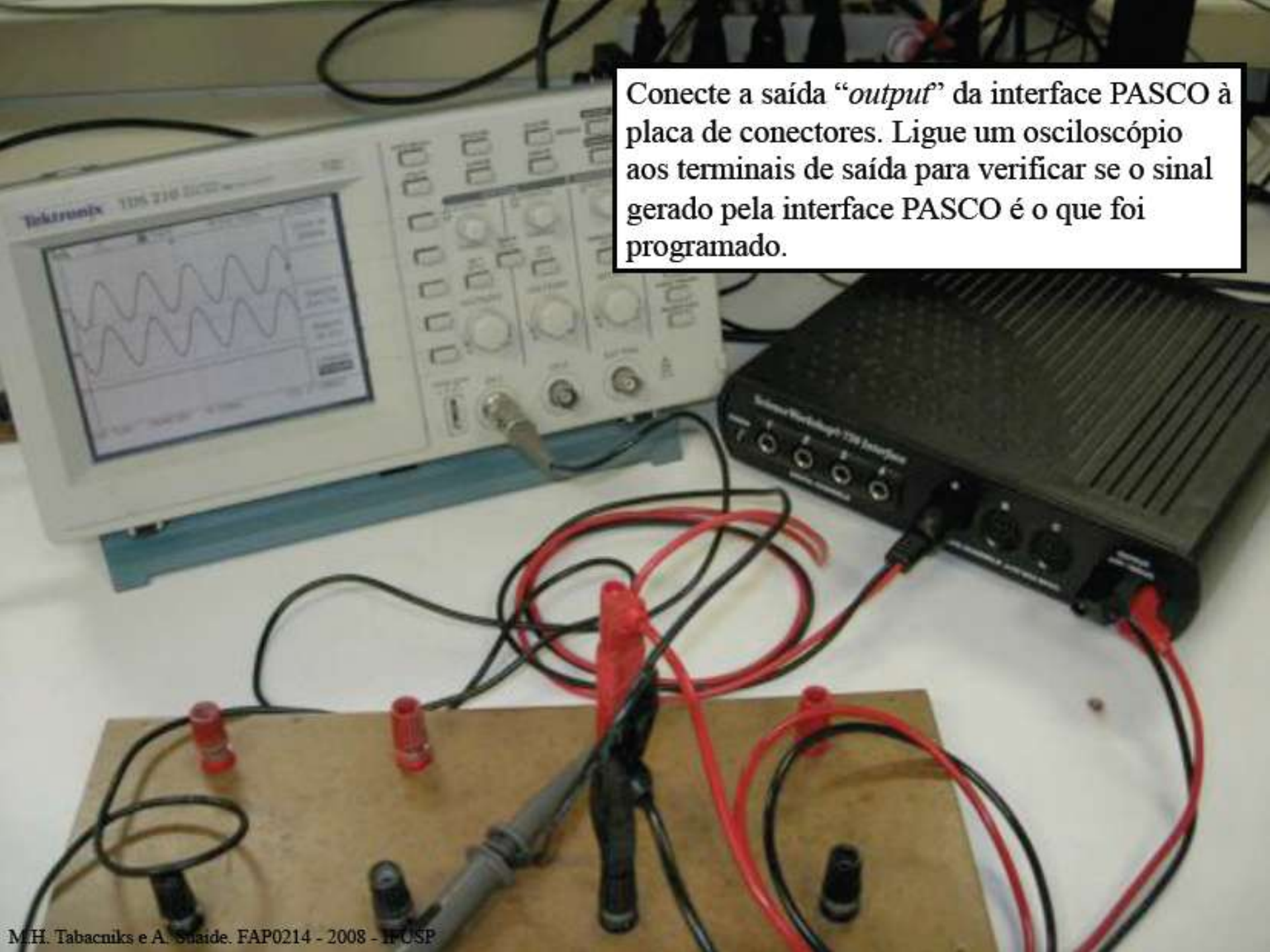
2) Conecte um adaptador para pino banana na **entrada A, B ou C**.

3) Conecte um par de fios com pino banana na saída *output*.

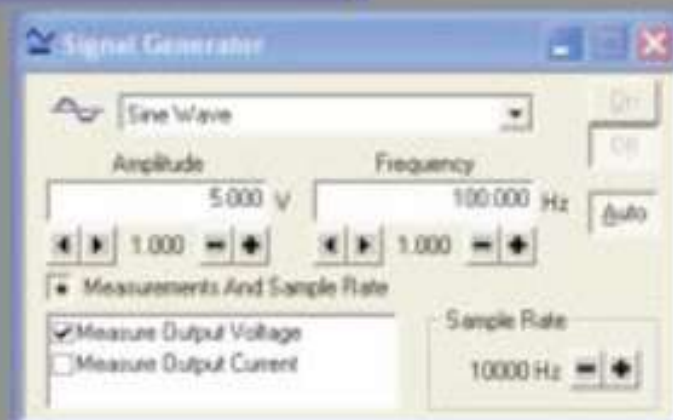
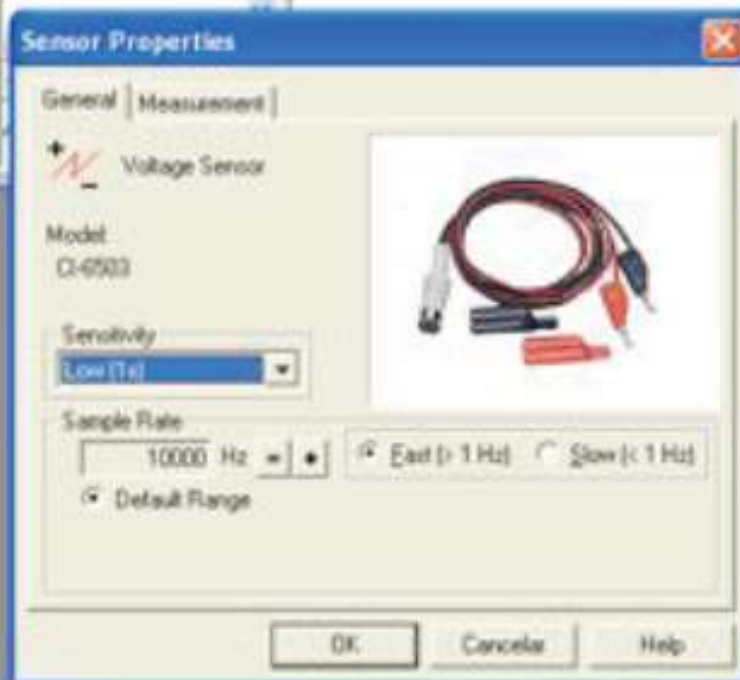
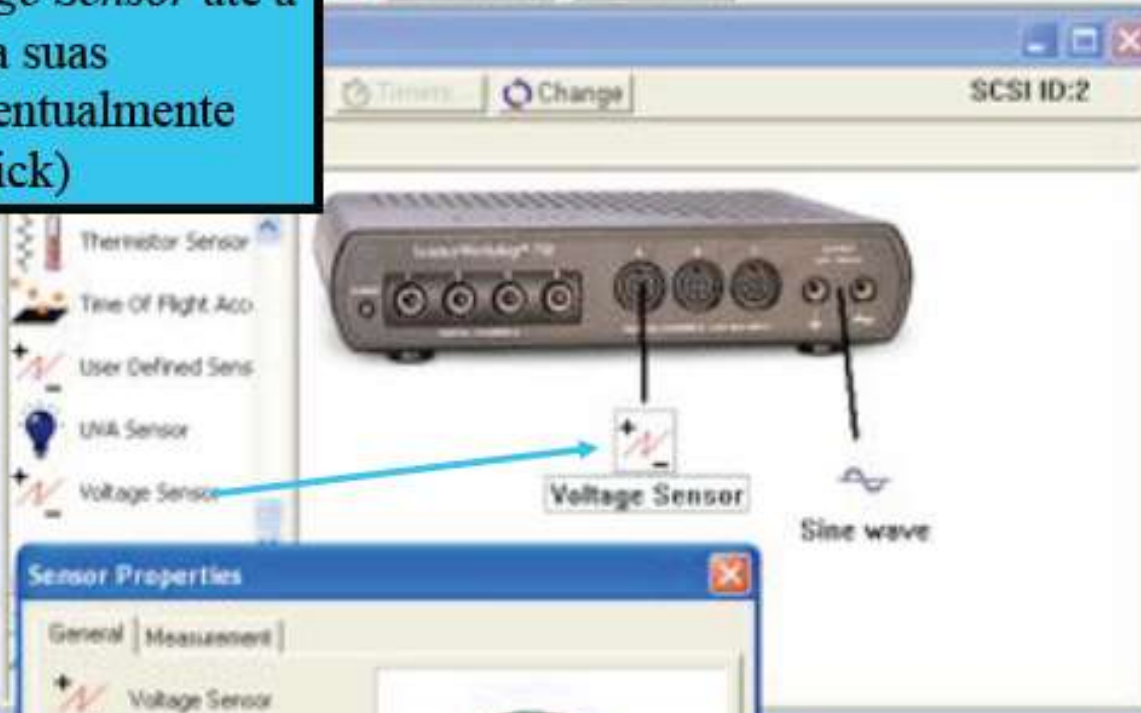


Arraste o gerador de sinal até a saída no 750. Defina uma frequência em torno de 100 Hz e 5V de amplitude.

Conecte a saída “*output*” da interface PASCO à placa de conectores. Ligue um osciloscópio aos terminais de saída para verificar se o sinal gerado pela interface PASCO é o que foi programado.



Arraste um *Voltage Sensor* até a entrada A. Defina suas propriedades (eventualmente com um duplo click)

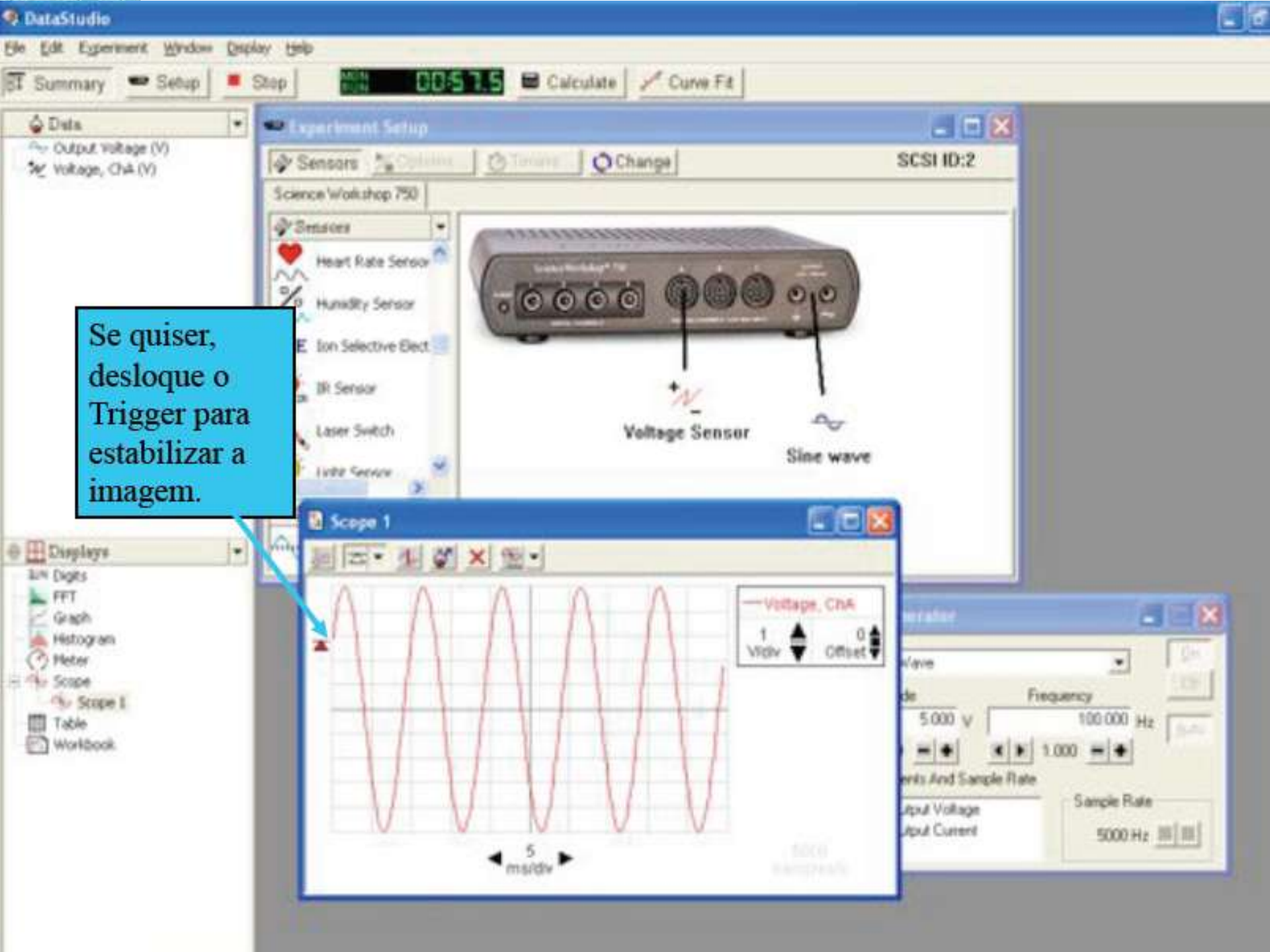


# Configuração do DataStudio

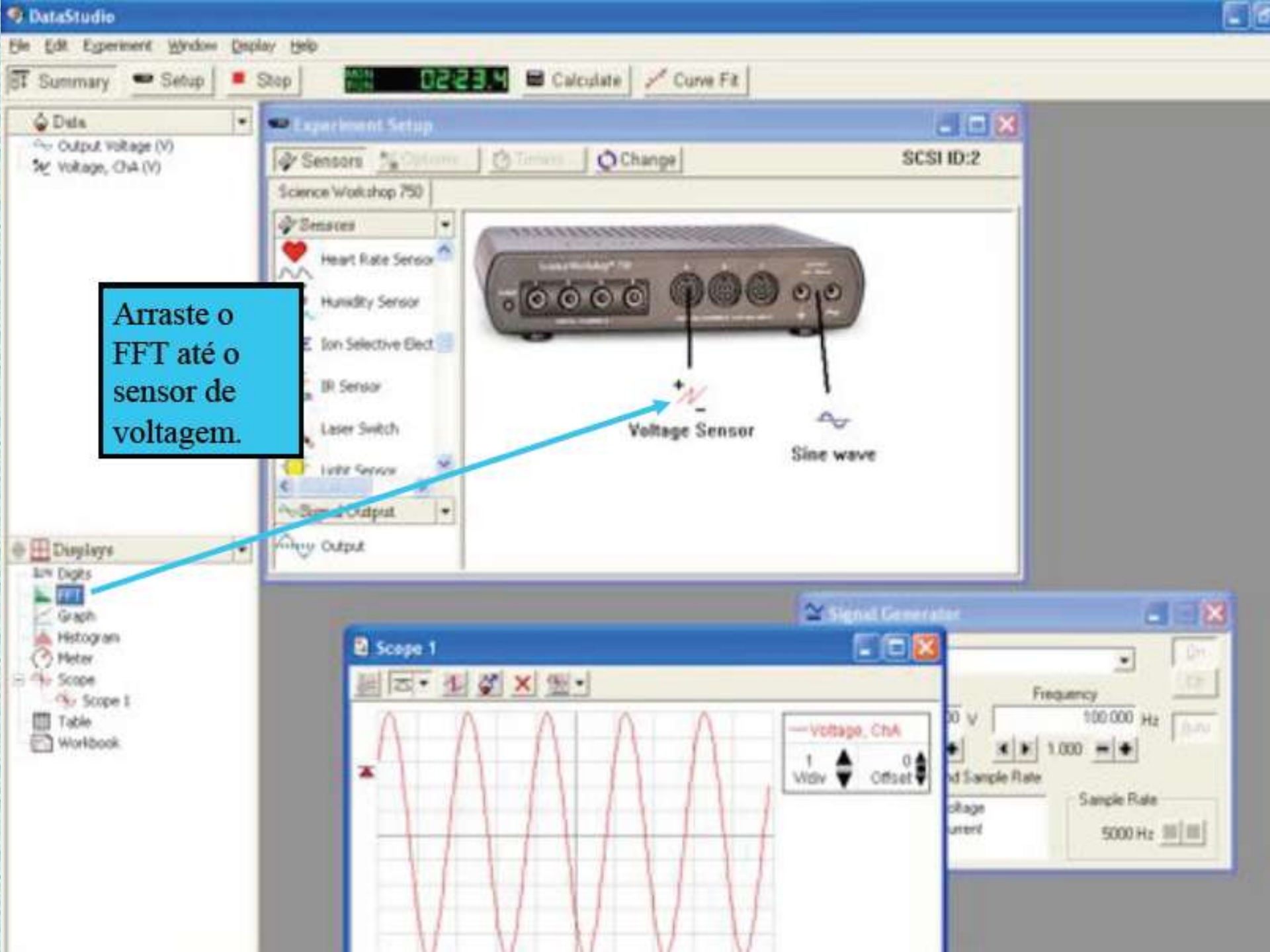
- As conexões físicas do 750 foram feitas.
- As conexões virtuais do 750 foram feitas. Definindo a saída como um gerador senoidal e a entrada como um sensor de voltagem.

**Falta medir: Isto é, definir qual “instrumento de medida” deverá ser ligado ao sensor de voltagem...**



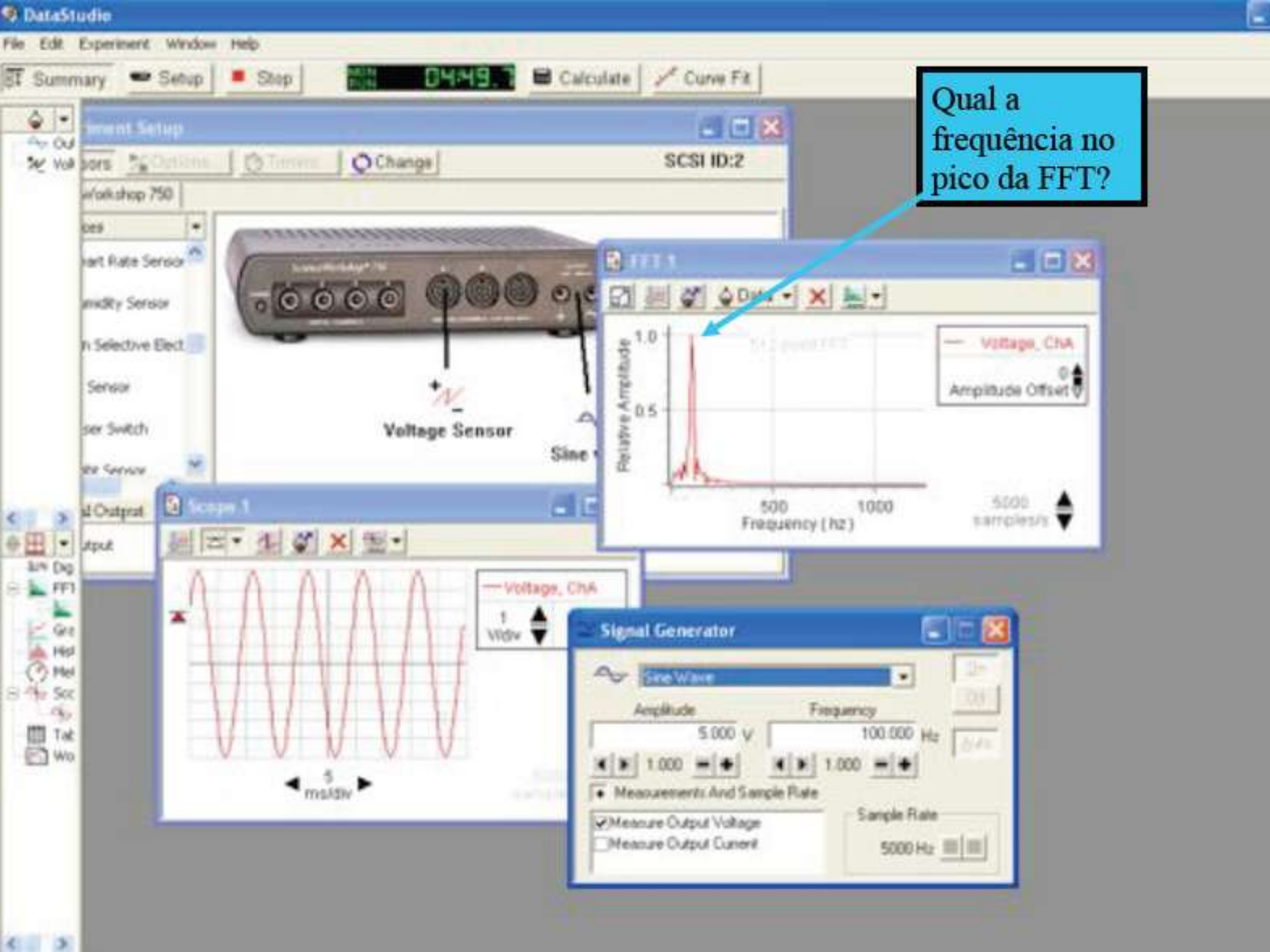


Se quiser,  
desloque o  
Trigger para  
estabilizar a  
imagem.

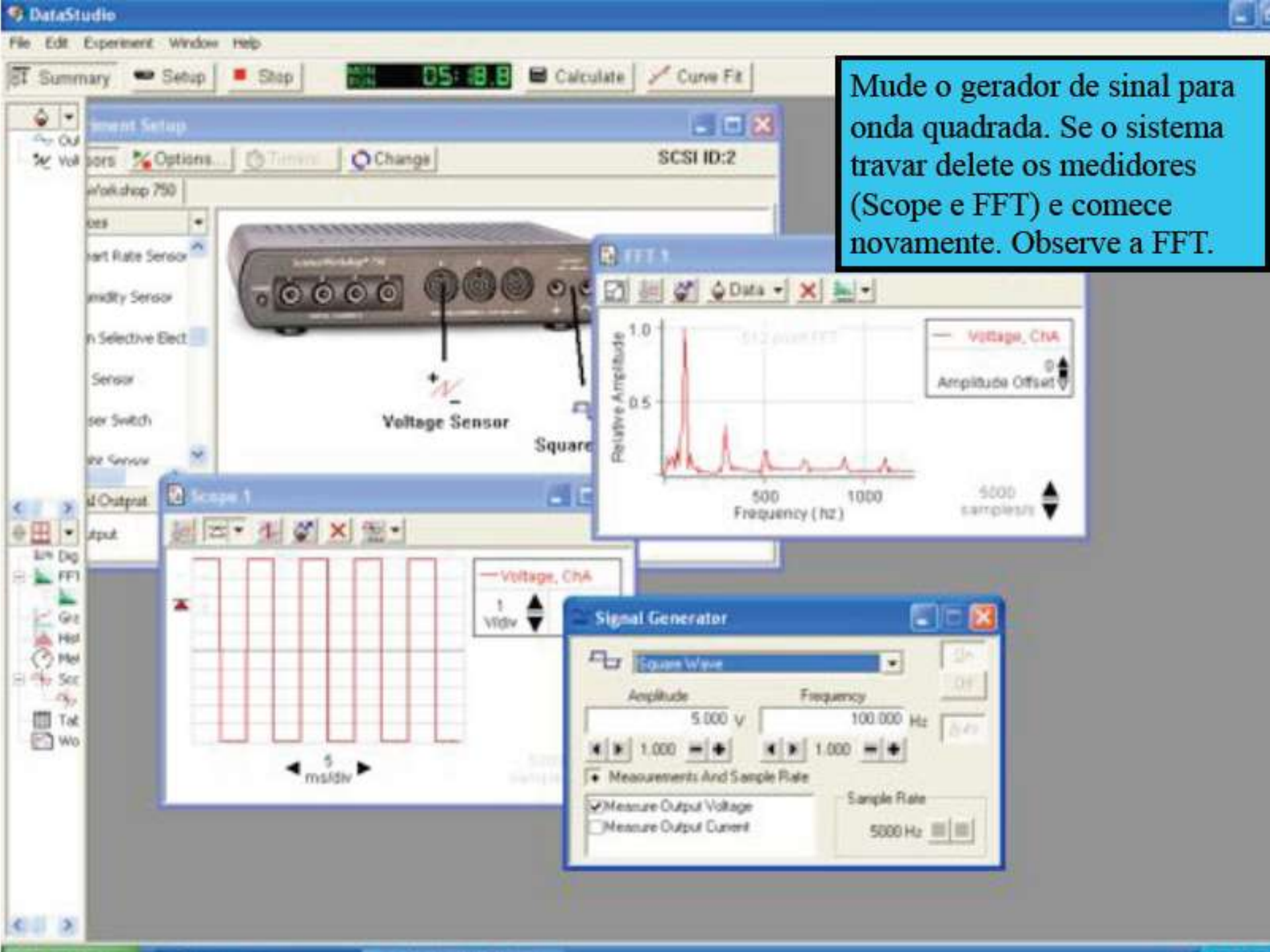


Arraste o  
FFT até o  
sensor de  
voltagem.

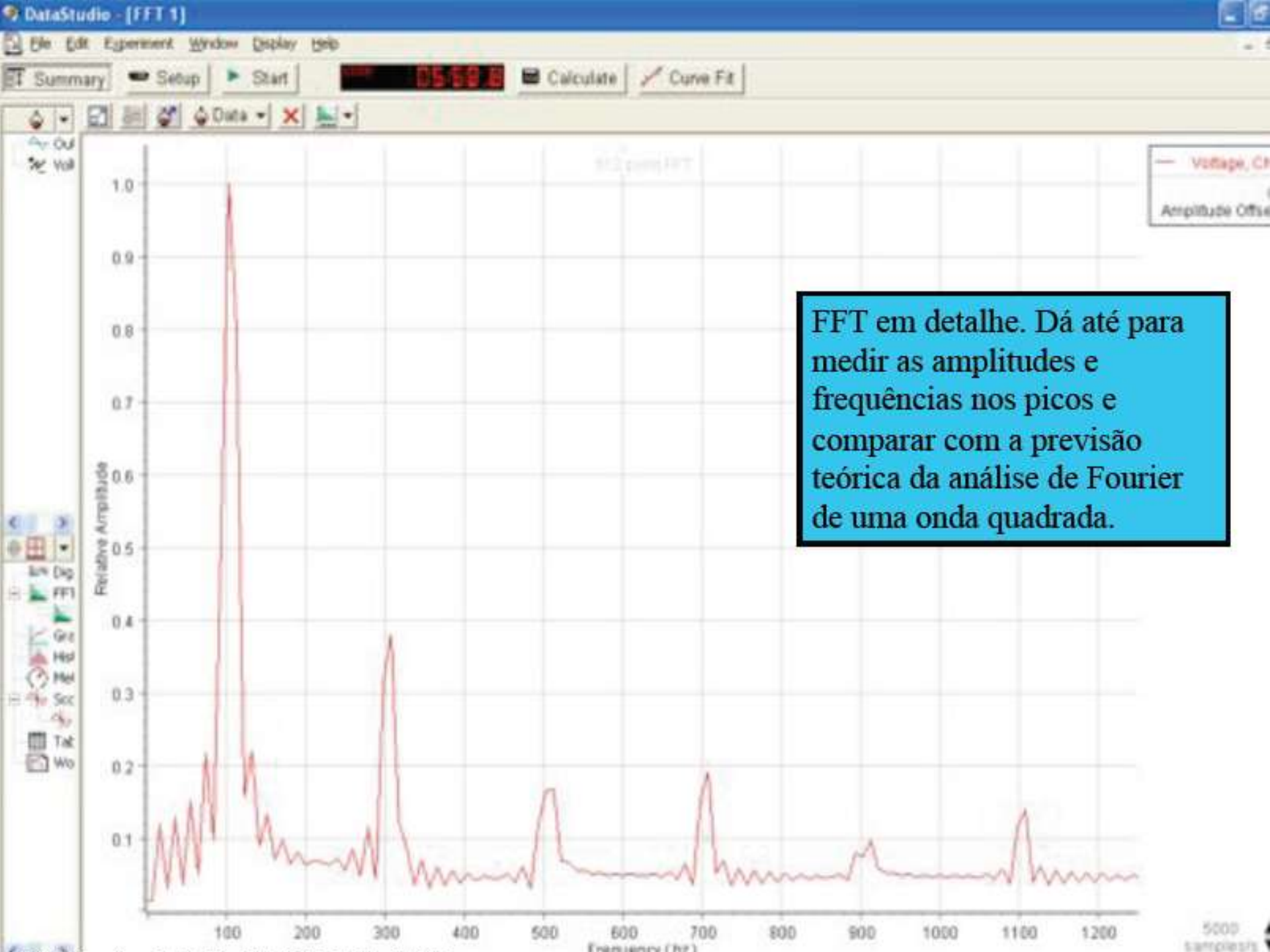




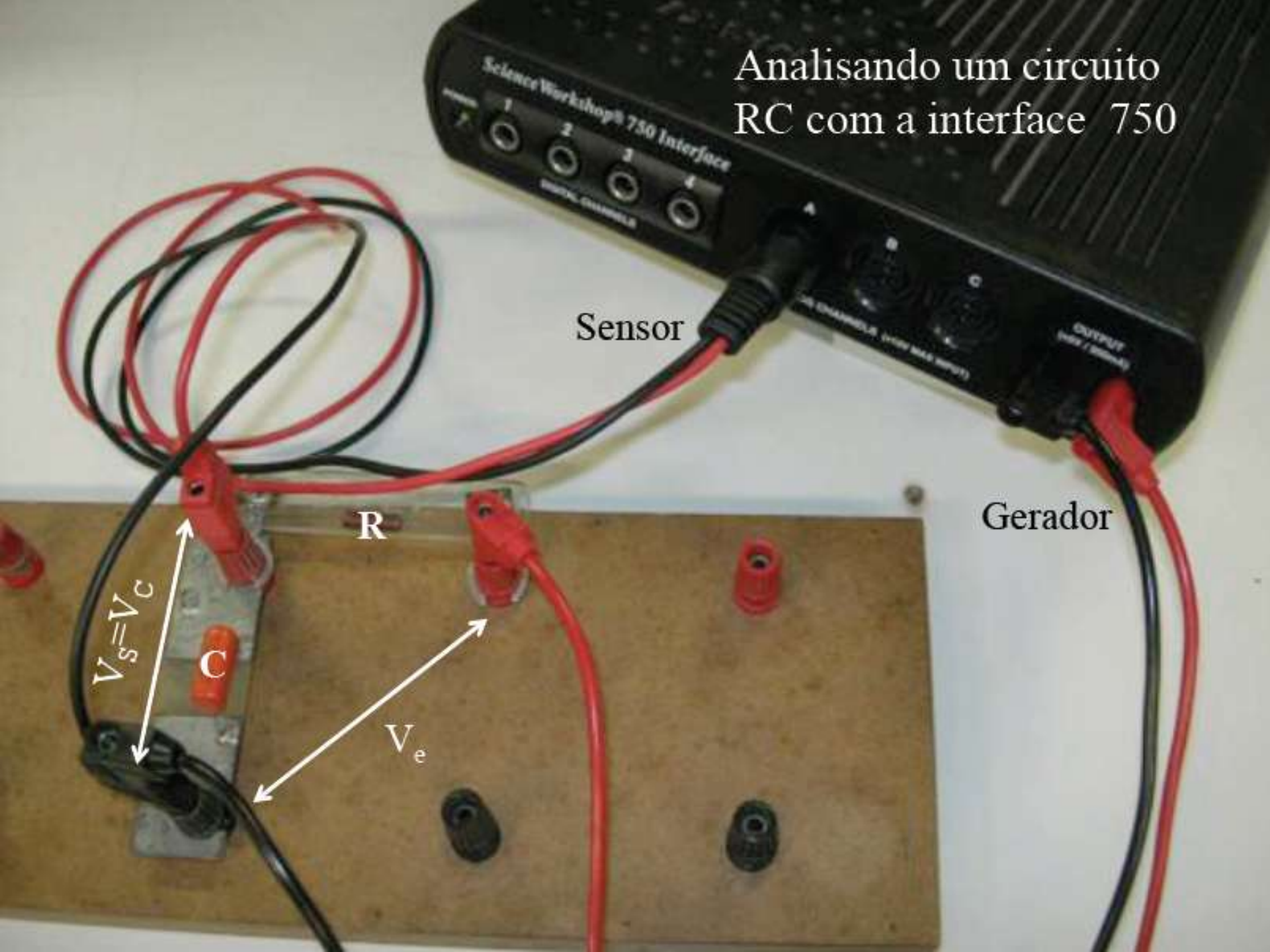
Qual a frequência no pico da FFT?



Mude o gerador de sinal para onda quadrada. Se o sistema travar delete os medidores (Scope e FFT) e comece novamente. Observe a FFT.



Analisando um circuito RC com a interface 750



Sensor

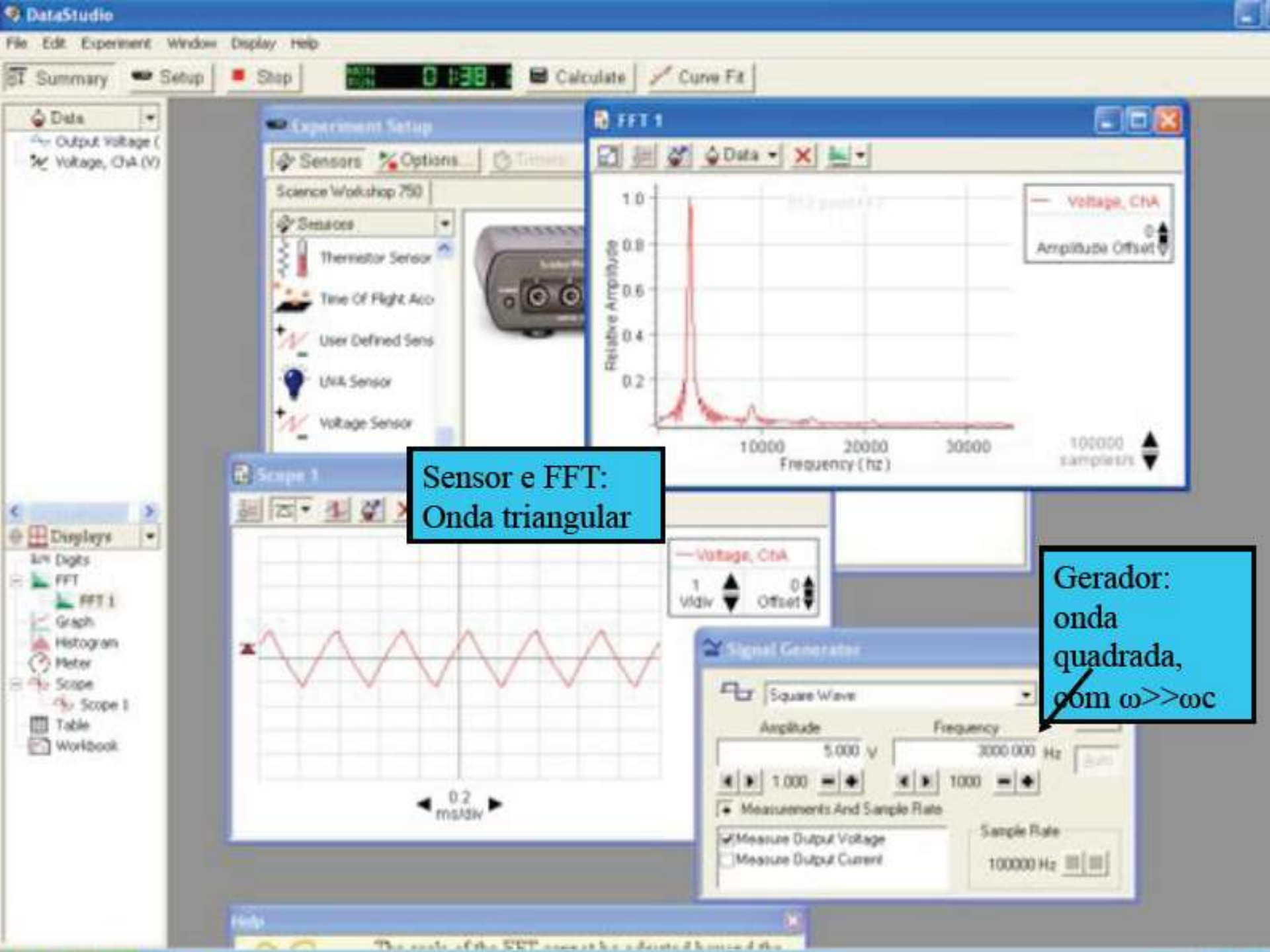
Gerador

R

C

$V_s = V_c$

$V_e$



Sensor e FFT:  
Onda triangular

Gerador:  
onda quadrada,  
com  $\omega \gg \omega C$

# Atividades da Semana 1

- Fazer análise de Fourier experimental usando o sinal do DataStudio
  - Onda senoidal
  - Onda quadrada
  - Onda triangular
- Obter as amplitudes das frequências que compõem o sinal e comparar quantitativamente com previsão teórica
  - Gráfico de  $A(f) \times f$

# Atividades da Semana 2

- Fazer análise de Fourier experimental usando o sinal de saída do filtro RC:
  - Onda triangular (alta freq.)
    - Obter as amplitudes das frequências que compõem o sinal e comparar quantitativamente com previsão teórica
      - Gráfico de  $A(f) \times f$ , comparando com dados anteriores e teoria.
- Obter a curva de ganho (baixa freq.)
  - Fazer a FFT do sinal de entrada e de saída, ao mesmo tempo, e obter a curva de ganho do circuito RC
    - comparar com previsão teórica
  - DICA: Para uma boa curva, escolha a frequência como sendo  $\sim 1/3$  de  $f_c$ . *Explique porque no relatório.*
    - Gráfico de  $G \times f$ , comparando com dados anteriores e teoria.