Física Experimental IV – FAP214

Notas de aula: www.fap.if.usp.br/~hbarbosa

LabFlex: www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex

Aula 1, Experiência 1
Circuitos CA e Caos

Prof. Henrique Barbosa
hbarbosa@if.usp.br
Ramal: 6647
Ed. Basílio Jafet, sala 100

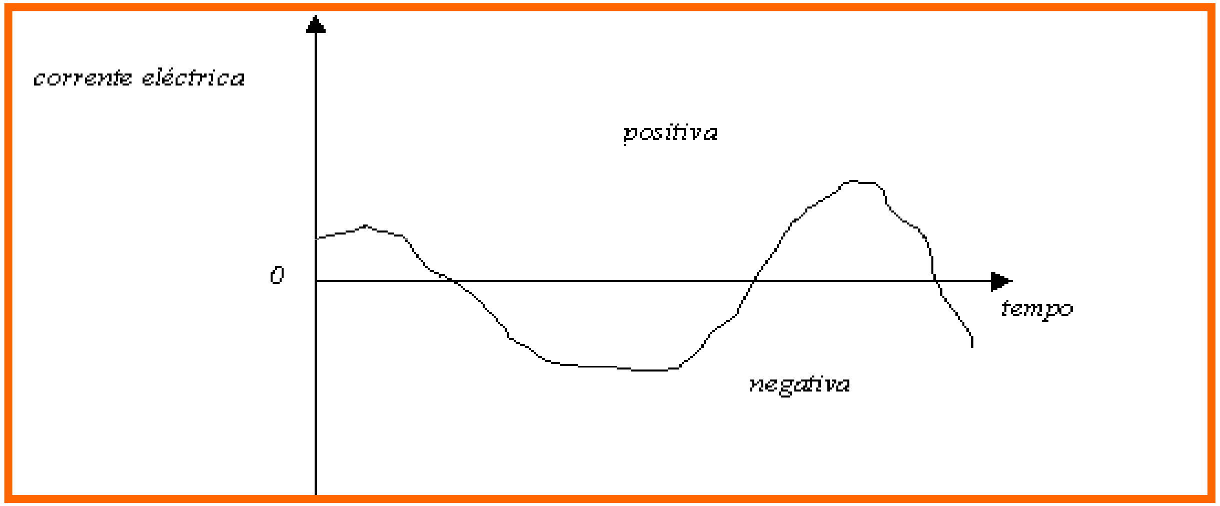
Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados

- **5 aulas**
  - Noções de ***CA***, filtro **RC** e circuito integrador
  - Análise de Fourier unidimensional
  - Ressonância de um circuito **RLC** simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito **RLD**

Tensões e Correntes Alternadas

- Tensão alternada: qualquer tensão que varia no tempo



- Na prática trabalhamos com tensões harmônicas simples

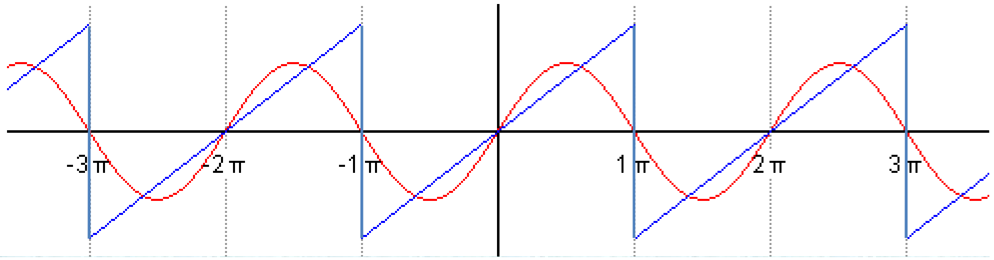
Veremos no lab4 que qualquer tensão dependente do tempo é uma superposição de tensões harmônicas simples

(1768–1830)

(Série de Fourier)

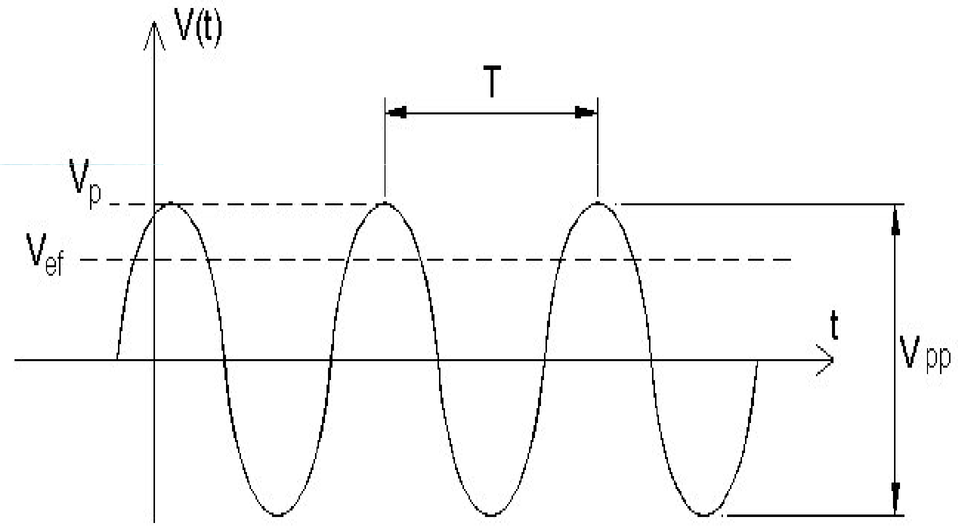
- Uma série de Fourier decompõe uma função periódica em uma simples soma de senos e cossenos (ou exponenciais complexas).
- Joseph Fourier introduziu estas séries infinitas para resolver a equação de transferência de calor em uma placa de metal.
- Não havia solução geral, apenas particulares para fonte de calor senoidal. A idéia de Fourier foi modelar uma fonte de calor complicada como uma superposição (ou combinação linear) de simples senos ou cossenos.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]$$



Tensões Harmônicas Simples

- Aquelas descritas por uma função harmônica simples de freqüência bem definida, ou seja:



$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\omega = 2\pi f \qquad T = \frac{1}{f}$$

$$V_{PP} = 2V_p \qquad V_{ef} = \frac{V_P}{\sqrt{2}}$$

V_P é a tensão máxima ou tensão de pico ou amplitude, ω é a freqüência angular e ϕ_0 é a fase da tensão alternada no instante t=0

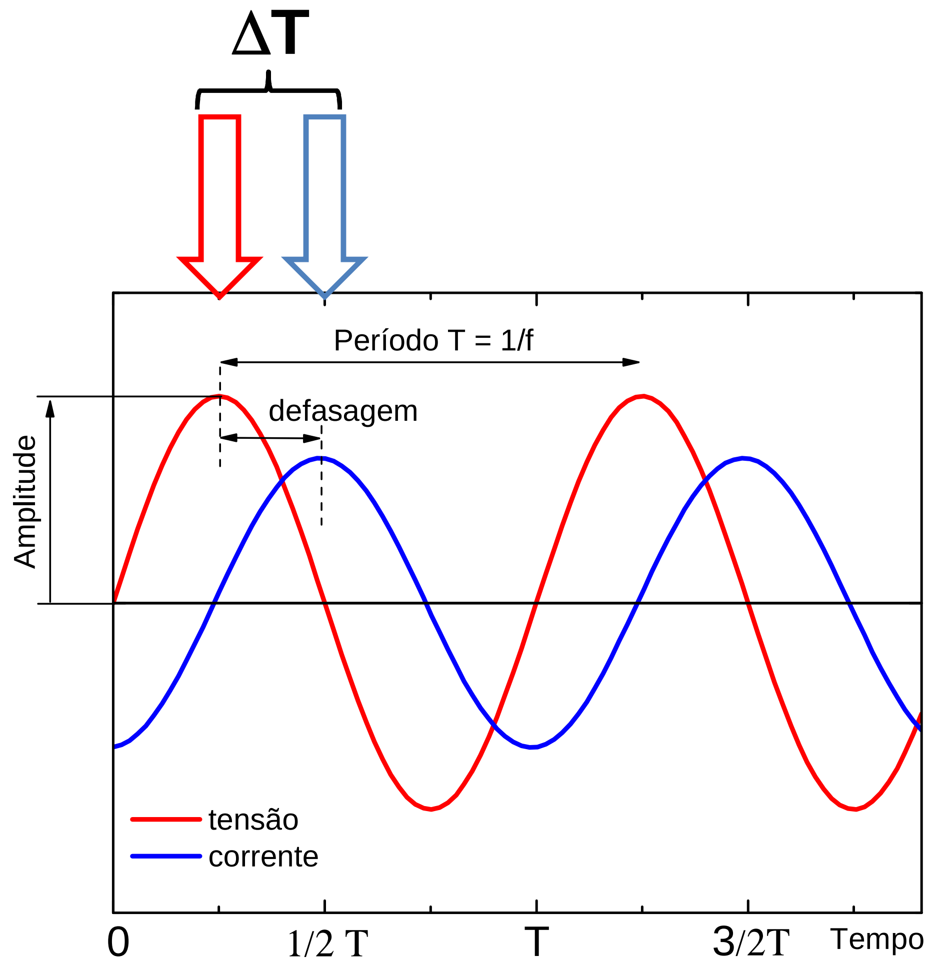
A fase

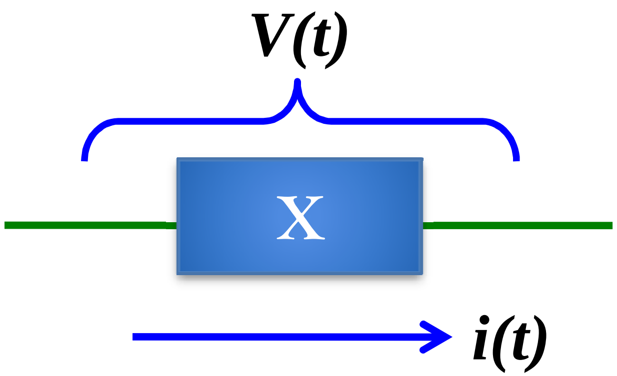
- Em um circuito de corrente alternada a tensão e corrente não necessariamente estão em fase:

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t)$$

$$V(t) = V_P \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$\phi = 2\pi \frac{\Delta T}{T} = \omega \cdot \Delta T$$





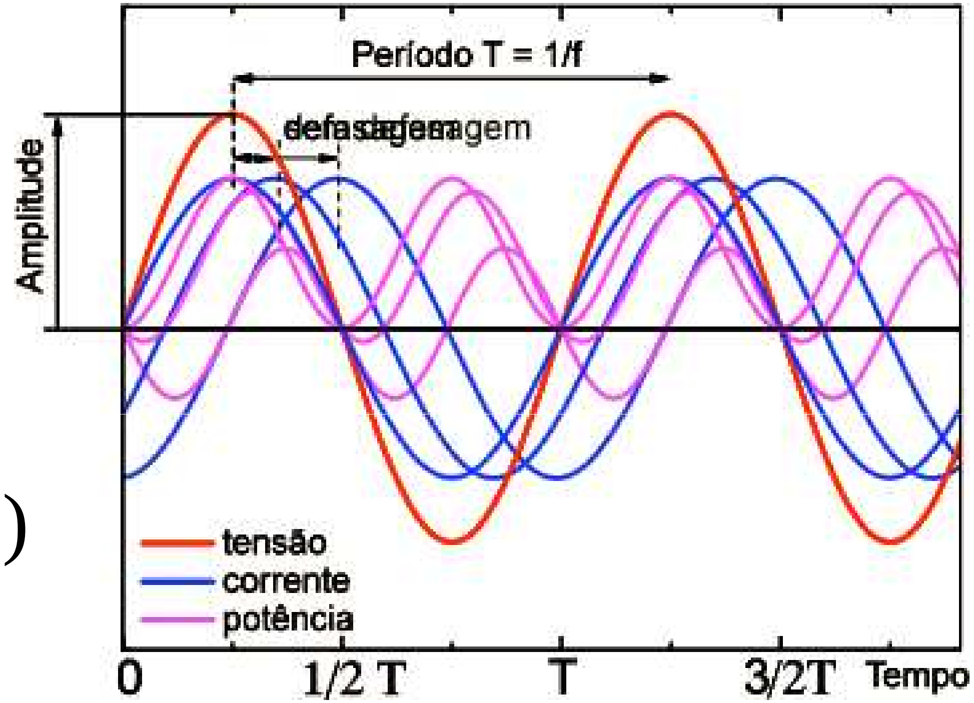
Potência Instantânea

- Instantaneamente:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P(t) = V_P i_0$$

$$\sin(\omega t + \phi)\sin(\omega t)$$



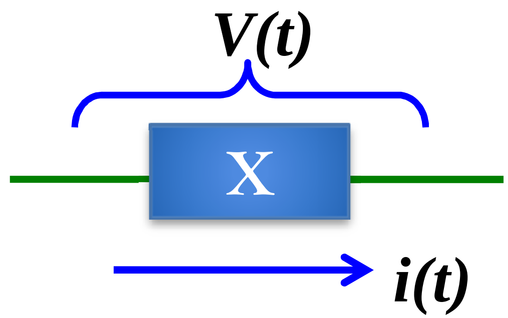
- Depende da fase entre corrente e tensão e pode ser negativa!

Potência positiva é aquela consumida

Potência negativa é aquela fornecida

Exemplo 1: Resistor Ôhmico

Em um resistor ôhmico simples, a relação entre tensão e corrente é:



$$R = \frac{V_P}{i_P} = cte$$

$$i(t) = i_P \cos(\omega t)$$

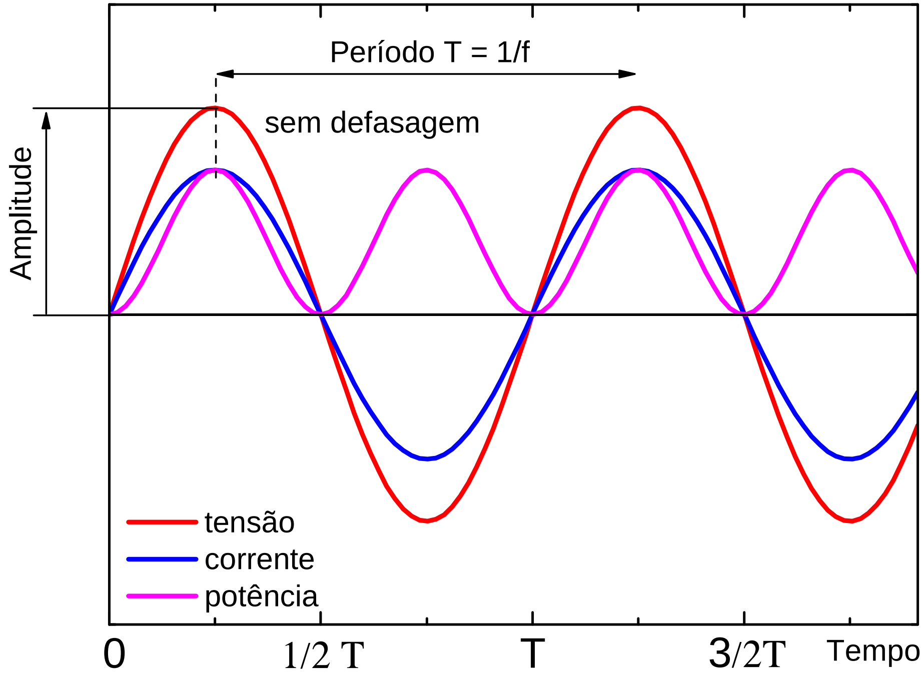
$$V(t) = R \cdot i(t) = Ri_P \cos(\omega t)$$

A fase entre tensão e corrente é nula

Exemplo 1: Resistor Ôhmico

- A potência instantânea é:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) \;\; = R \cdot i_0^2 \cdot \cos^2(\omega t) \;\; > 0, \text{ sempre}$$



•A potência varia no tempo, mas é sempre positiva o que significa que o resistor sempre consome potência

Exemplo 2: Capacitor Ideal

Em um capacitor ideal, a capacitância é dada pela razão entre carga acumulada e tensão elétrica, ou seja:

$$C = \frac{q(t)}{V(t)} \Rightarrow V(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Além disso, carga e corrente estão relacionados

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$$

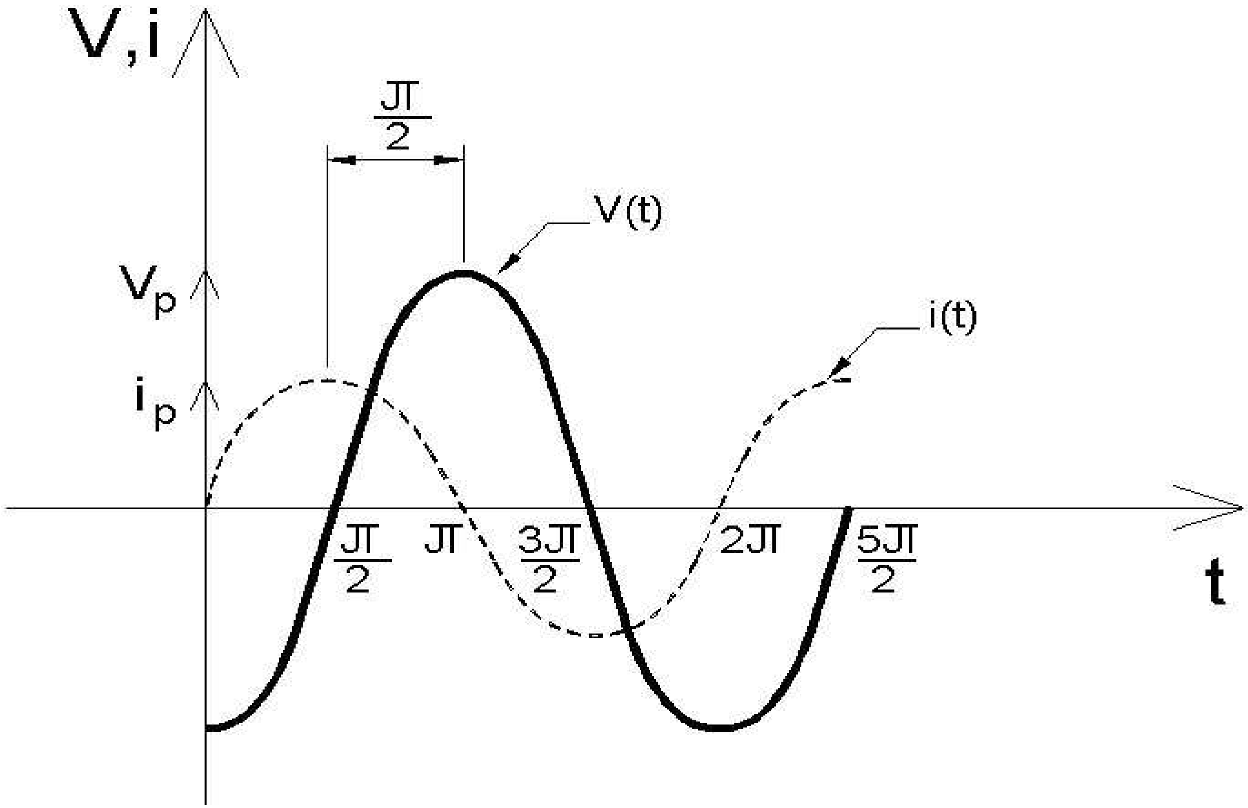
A fase não é nula!

Portanto:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$i(t) = -\omega C V_p \sin(\omega t) = \omega C V_p \cos(\omega t - \pi / 2)$$

Exemplo 2: Capacitor Ideal



a corrente está adiantada de $\pi/2$ em relação à tensão aplicada ao capacitor (Atenção: a defasagem de $\pi/2$ é entre a corrente e a tensão diretamente sobre o capacitor e não quaisquer outras).

Exemplo 2: Capacitor Ideal

- A potência em um capacitor pode ser escrita como:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P(t) = \frac{i_0^2}{\omega C} \cos(\omega t) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Em circuitos de corrente alternada, muitos elementos possuem fases não nulas entre corrente e tensão. Nestes casos, o formalismo trigonométrico torna-se bastante complexo e inconveniente.

Números Complexos

$$\hat{C} = a + b\,j \qquad j = \sqrt{-1}$$

$$\hat{C} = C\,e^{j\alpha} \qquad e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right) = j\omega e^{j\omega t}$$

$$\int e^{j\omega t}\,dt = \frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}$$

Integrais e derivadas
nesta notação são
apenas multiplicações
e divisões

Formalismo Complexo

- Este formalismo é construído de tal forma a facilitar todos os cálculos que envolvem tensões alternadas
- Vamos definir as tensões e correntes complexas como sendo:

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)} \quad \Rightarrow \quad V(t) = \mathrm{Re}\left(\hat{V}(t)\right) = V_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\hat{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)} \quad \Rightarrow \quad i(t) = \mathrm{Re}\left(\hat{i}(t)\right) = i_0 \cos(\omega t + \phi_1)$$

Impedância Complexa e Real

A impedância complexa de um elemento X é definida como sendo a razão entre a tensão e corrente complexas neste elemento, ou seja:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$

Usando a definição das tensões e correntes complexas, deduzimos que:

$$\hat{Z} = \frac{V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)}}{i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)}} = \frac{V_0}{i_0} e^{j(\phi_0 - \phi_1)} = Z_0 e^{j\phi}$$

Z_0 é a impedância REAL do elemento X

ϕ é a diferença de fase entre a tensão e corrente causada pelo elemento X

A impedância NÃO varia com o tempo. É uma grandeza característica do elemento X

Resistência e Reatância

- Da definição de impedância complexa:

$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi}$$

- Podemos escrever também que:

$$\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$$

- Define-se resistência (R) de um bipolo como sendo:

$$R = Z_0 \cos(\phi)$$

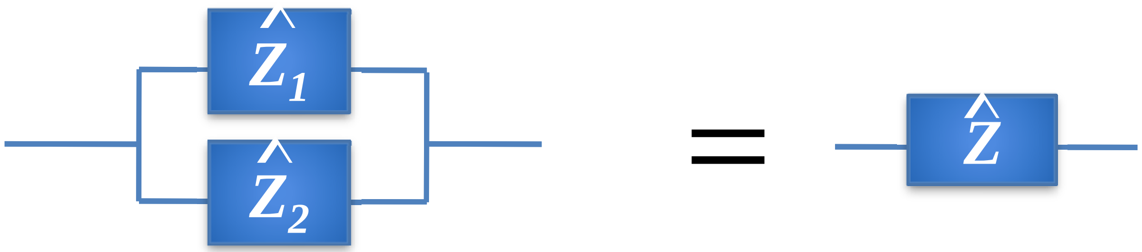
- E reatância deste bipolo (X)

$$X = Z_0 \sin(\phi)$$

Porque usar este formalismo?

- As grandes vantagens deste formalismo são:
  - Operações envolvendo tensão e corrente são simples
    - Multiplicações e divisões de exponenciais
  - Associações de bipolos tornam-se simples
    - Como resistores comuns, mas realizadas com grandezas complexas

$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$$

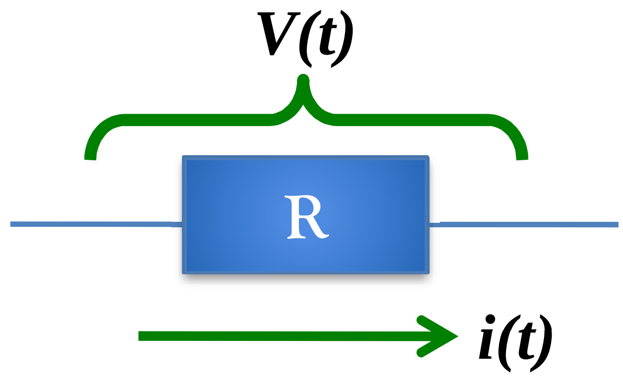


$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}$$

Aplicação para o Resistor

- Seja uma tensão e corrente complexas, temos:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$



- Mas sabemos que $R = V/i$, ou seja, a corrente e tensão estão sempre em fase. Assim:

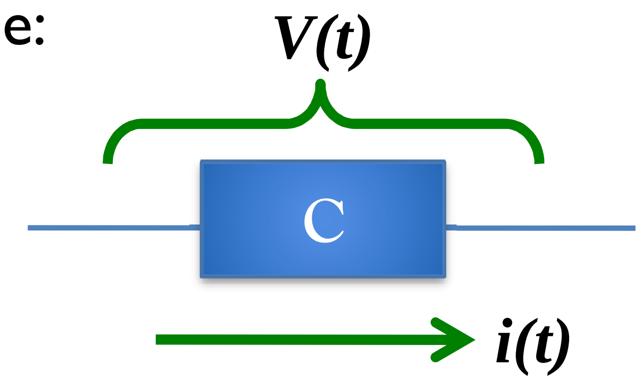
$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi} = R \Rightarrow \begin{cases} Z_0 = R \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Por conta disto que resistores Ôhmicos são muito utilizados em laboratório para medir correntes

Aplicação para o Capacitor

- Sabemos que (do começo da aula) $$V(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$
- Se a corrente complexa for dada por: $$\hat{i}(t) = i_0 e^{j\omega t}$$
- Fica fácil demonstrar que $$\hat{V}(t) = -\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}$$
- A impedância de um capacitor vale:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{-\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j\omega t}} = -\frac{j}{\omega C}$$



Aplicação para o Capacitor

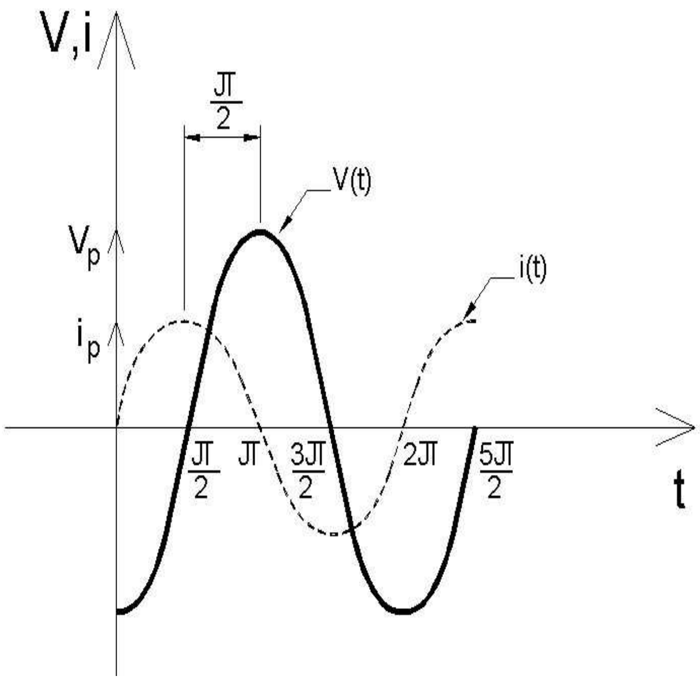
- Ou seja $\hat{Z} = -\dfrac{j}{\omega C}$

- Mas lembrando que: $\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$

- Comparando as duas expressões temos que:

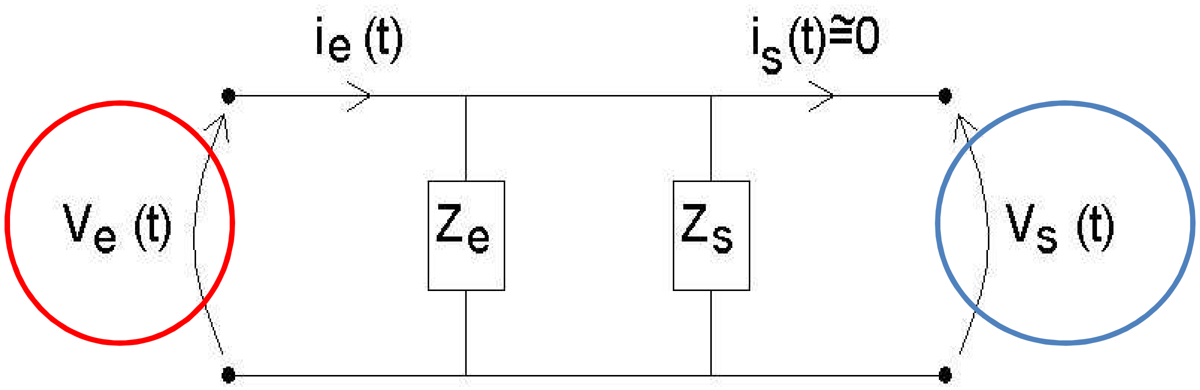
$$Z_0 = \frac{1}{\omega C} \qquad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

Conclui-se naturalmente que a tensão elétrica está defasada de π/2 em relação à corrente



Esta Aula: Filtros e Circuitos Especiais

- Seja um quadripolo qualquer:

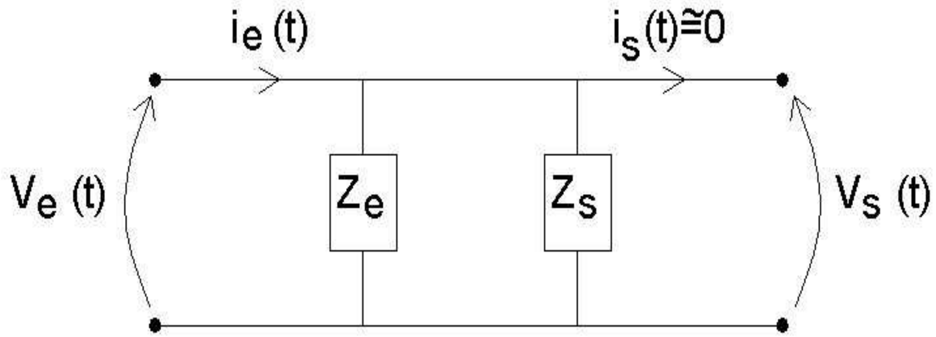


- Sinal de entrada = V_e
- Sinal de saída = V_s
- Como um se relaciona ao outro?

Esta Aula: Filtros e Circuitos Especiais

- Impedância de entrada, saída e ganho

$$\hat{Z}_e = \frac{\hat{V}_e}{\hat{i}_e}$$

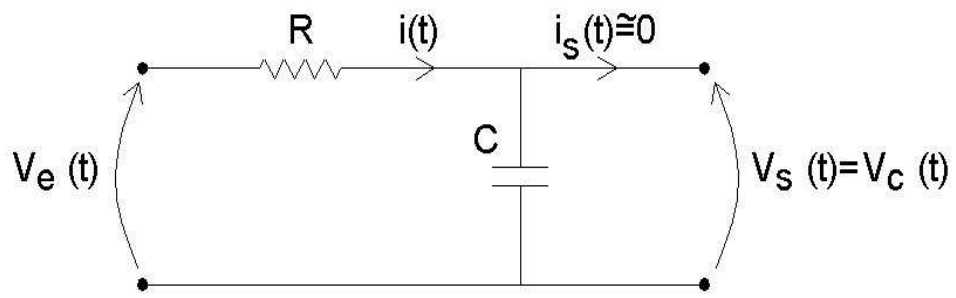


$$\hat{Z}_s = \frac{\hat{V}_s}{\hat{i}_s}$$

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_e}$$

vamos ver como, com uma única tomada de dados, podemos explorar vários aspectos diferentes deste circuito.

Filtro RC



- Seja o filtro RC ao lado:
- Supondo que a corrente de saída seja praticamente nula (i_s ~ 0)

$$\hat{Z}_C = \frac{\hat{V}_C}{\hat{i}_C} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{i}} \Rightarrow \hat{V}_S = \hat{Z}_C \cdot \hat{i}$$

- Da mesma forma, podemos obter que:

$$\hat{V}_e = \hat{Z}_{total} \cdot \hat{i} = (\hat{Z}_R + \hat{Z}_C) \cdot \hat{i}$$

- E o “ganho” no circuito é dado por:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = \frac{\hat{Z}_C \cdot \hat{i}}{(\hat{Z}_R + \hat{Z}_C) \cdot \hat{i}} = \frac{\hat{Z}_C}{(\hat{Z}_R + \hat{Z}_C)} = \frac{-\frac{j}{\omega C}}{(R - \frac{j}{\omega C})}$$

Filtro RC – O Ganho

Como calcular o ganho, através da expressão?

$$\hat{G} = \frac{-\frac{j}{\omega C}}{(R - \frac{j}{\omega C})}$$

Dividindo por *–j/ωC:* $\hat{G} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$

Definimos a freqüência de corte (ω_C) como sendo:

$$\omega_C = \frac{1}{RC}$$

O ganho fica: $\hat{G} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_C}}$

Filtro RC – O Ganho

- Usando a notação complexa: $$\hat{G} = G_0 e^{j\phi_G}$$

Para obter *G, simplesmente troque todos os (*j*) por (*-j*)**

O ganho real e a defasagem ficam:

$$\phi_G = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left[\hat{G}\right]}{\mathrm{Re}\left[\hat{G}\right]}\right) \qquad G_0 = \sqrt{\hat{G}^* \hat{G}}$$

Fazendo a conta:

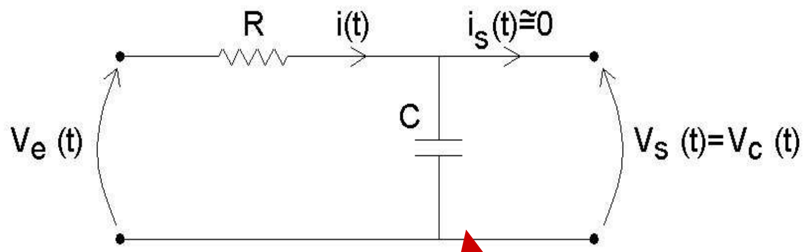
$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}} \qquad \phi_G = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_C}\right)$$

O que estamos filtrando?

$$G_0 = \sqrt{\hat{G}\hat{G}^*} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\omega_C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$$

- Portanto, o ganho real do filtro **RC**, depende da freqüência da tensão alternada a que ele está submetido.
- No caso em que essa freqüência é baixa: $\omega \ll \omega_C$, o termo (ω^2/ω_C^2) fica muito pequeno se comparado à unidade e o ganho é praticamente igual a **1, i.e., tensão de saída é praticamente igual à tensão de entrada.**
- No caso em que $\omega \gg \omega_C$, o termo (ω^2/ω_C^2) fica muito grande e o **ganho vai a zero**, i.e., **para freqüências altas a tensão de saída é muito menor que a tensão de entrada**.

Resumo do Filtro



O circuito

O Ganho é: $\hat{G} = \dfrac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = G_0 e^{j\phi_G}$

Sendo:

$$\omega_C = \frac{1}{RC}$$

R e C podem ser medidos e há valores nominais

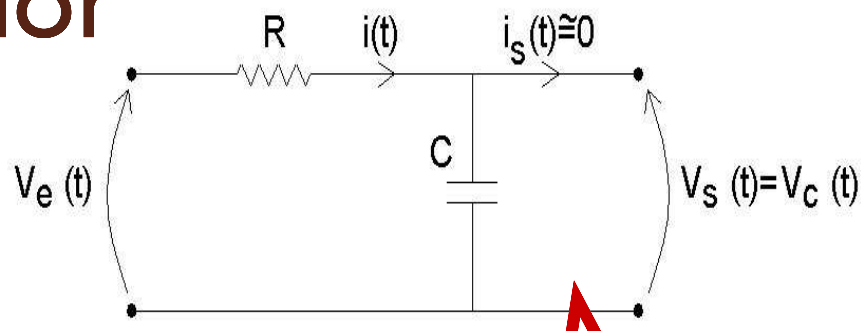
$$G_0 = \frac{V_S^0}{V_e^0} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}} \qquad \phi_G = \omega \cdot \Delta T_{S-e} = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_C}\right)$$

Tensões são medidas com osciloscópio

A freqüência também

Intervalo de tempo entre duas tensões também é mensurável

Circuito Integrador



Circuito especial

Sabemos que:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = G_0 e^{j\phi_G}$$

Com: $G_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_C)^2}}$ $\qquad \phi_G = \arctan\left(-\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)$

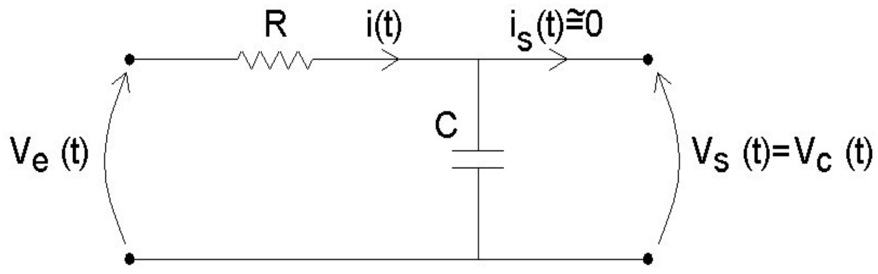
Se ω>> ω_c, então: $G_0 \approx \dfrac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_C)^2}} = \dfrac{\omega_C}{\omega}$ $\qquad \phi_G = \tan^{-1}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$

Ou seja: $\hat{G} = \dfrac{1}{\omega RC} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{j\omega RC}$

Circuito Integrador

- Então:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = \frac{1}{j\omega RC}$$



- **Ou ainda:**

$$\hat{V}_S = \frac{1}{j\omega RC}\hat{V}_e$$

- **Lembrando que:** $\hat{V}_e = V_e e^{j\omega t}$

- **E que:** $\int \hat{V}_e dt = \frac{1}{j\omega} V_e e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega}\hat{V}_e$

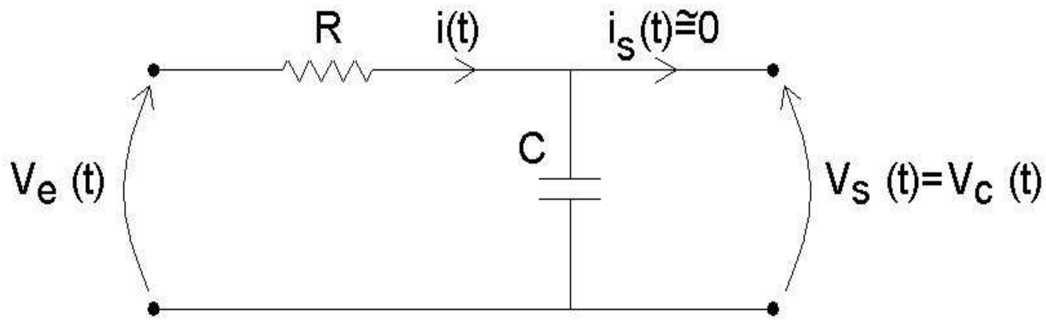
- **Temos que:**

$$\hat{V}_S = \frac{1}{RC}\int \hat{V}_e dt$$

No limite que $\omega >> \omega_c$, $G_0 \rightarrow 0$ e
o circuito acima funciona como
integrador da tensão de entrada

Para esta aula

- Vamos estudar o filtro **RC**:



Objetivos:

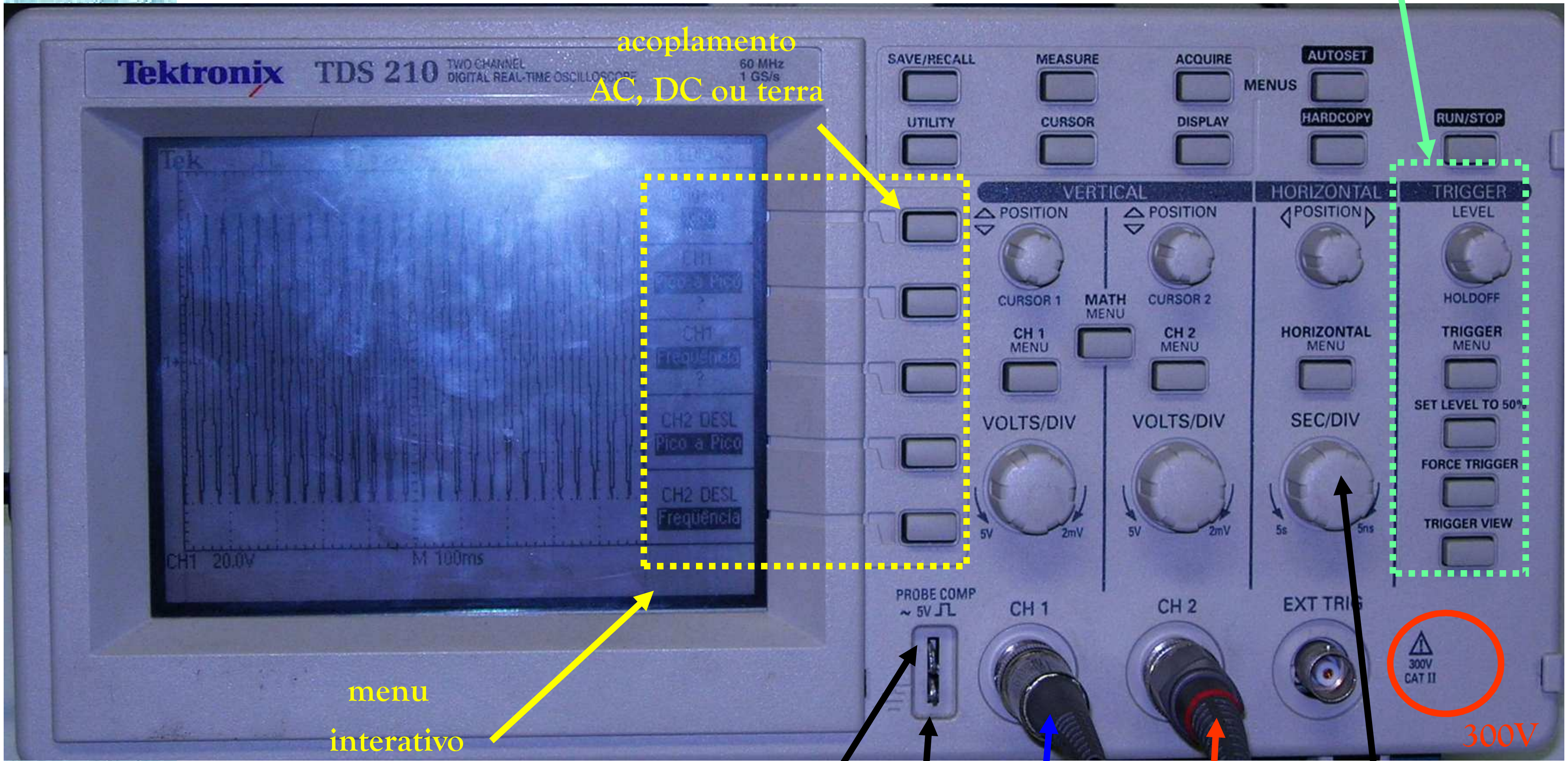
Obter experimentalmente o ganho (G_0 e Φ_G) em função da freqüência (ω) e comparar com a previsão teórica

Para isto é preciso conhecer R e C.

Não confiar nos valores nominais

Osciloscópio

gatilho (trigger)



referência 5V

terra

canal 1

canal 2

varredura (horizontal)

A ponta de prova tem atenuador
que pode ser alterado
(muda também a impedância)

Gerador de audio

IMPORTANTE!

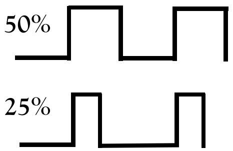
RESISTOR

CAPACITOR

Duty cycle
ADJust

50%

25%



Frequency
ADJust

Amplitude
ADJust

atenuador

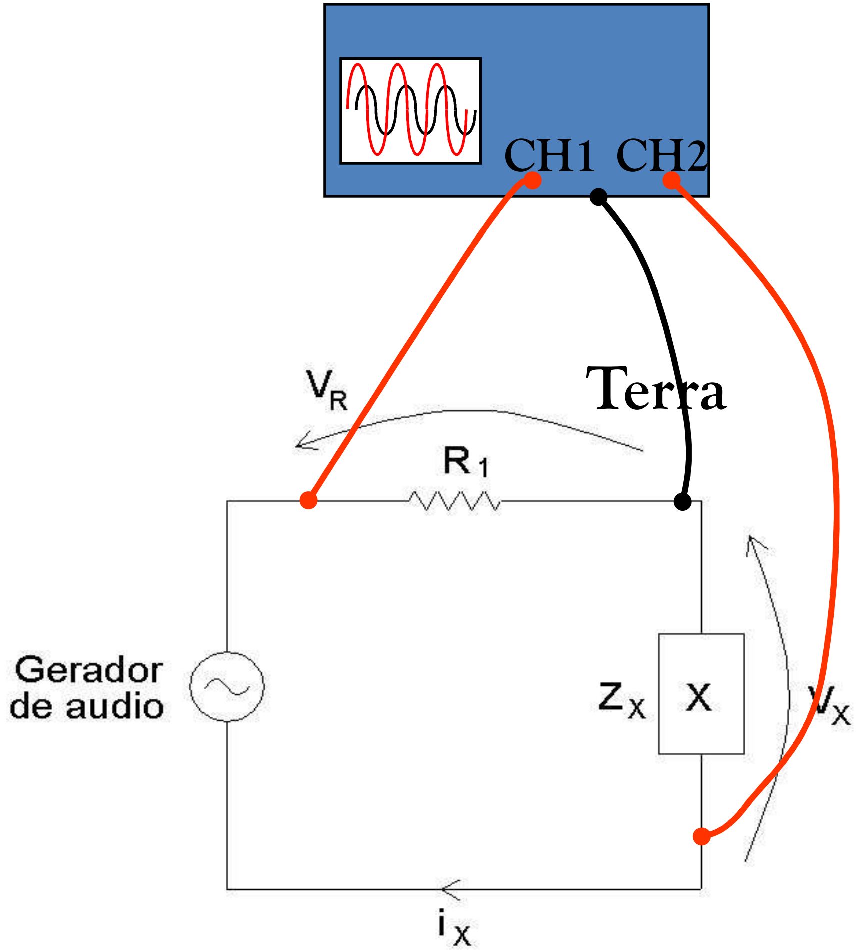
intervalo de
frequências

Executa
parâmetro

Cuidados Experimentais

Instrumentos de medida:

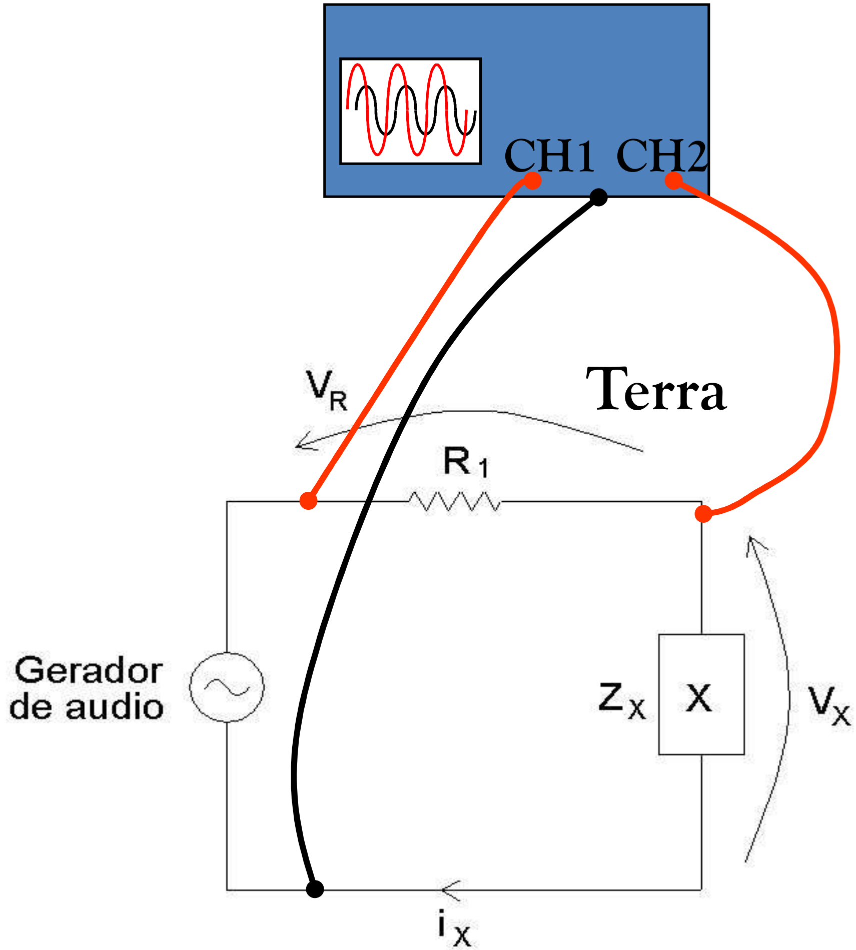
- **Osciloscópio**
  - Canal 1: $-i_R = -V_R/R$ é a corrente no circuito
  - Canal 2: V_X
- Cuidado com ruídos
  - Estimar incertezas na tensão e corrente a partir do nível de ruído



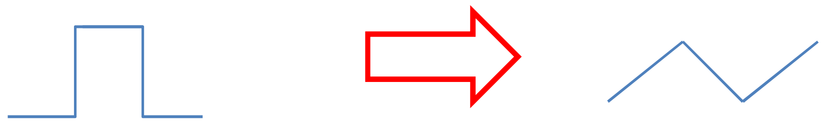
Ligação do osciloscópio com centro em terra. Para correta medida de fase é necessário inverter uma das medidas (ou subtrair π, da diferença de fase medida).

Cuidados Experimentais

Montagem experimental:

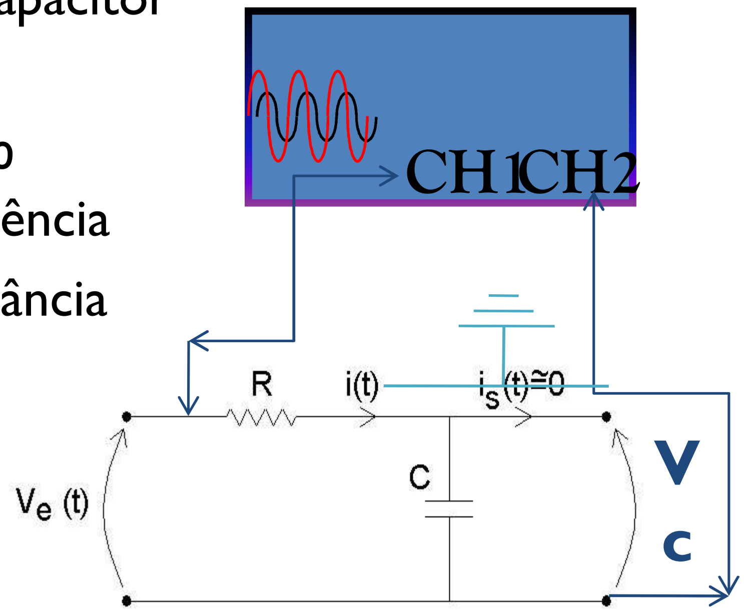


Cuidado, ao montar o circuito para as medidas do integrador, vocês terão que ler a tensão de entrada e de saída, i.e., no gerador de áudio e no capacitor... Portanto o terra fica posicionado de maneira diferente!



Capacitor: objetivos para esta semana

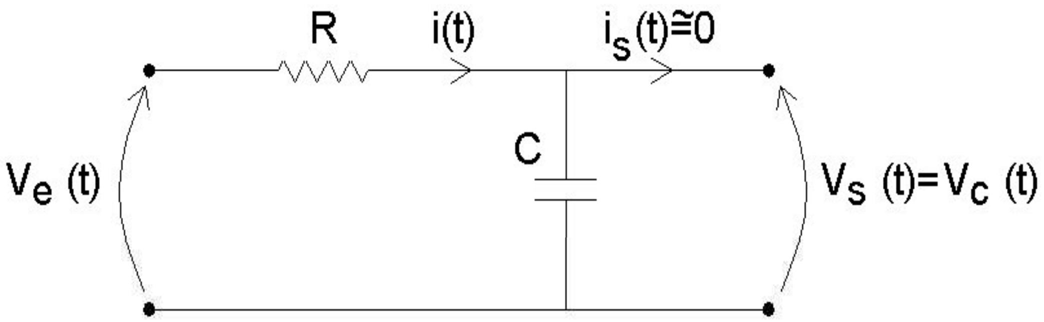
- Montar o circuito ao lado:
  - Medir a tensão e a corrente sobre o capacitor
    - A tensão de pico e a corrente de pico
  - Com esses dados fazer o gráfico de Z_0 (reatância capacitiva) em função da freqüência e extrair o valor experimental da capacitância



Medir a defasagem entre tensão e corrente no capacitor em função da freqüência e comparar com a previsão teórica.

Filtro RC: objetivos para esta semana

- Vamos estudar o filtro **RC**:



Objetivos:

→ **Obter experimentalmente o ganho (G_0 e Φ_G) em função da freqüência (ω) e comparar com previsão teórica**

Para isto preciso conhecer R e C.

Não confiar nos valores nominais

Circuito Integrador: objetivos

- Para freqüências tais que **$\omega >> \omega_c$**, mostrar que:

$$\hat{V}_S = \frac{1}{RC}\int \hat{V}_e dt$$

- Utilizando o gerador de tensões com **ONDA QUADRADA**
  - Medir **V_S** e **V_e**
    - Tirar foto do osciloscópio e entregar como atividade
  - E também:
    - Mostrar que **V_S** corresponde à integral de **V_e**:
      - Mostar que **V_S** é um triângulo
      - Mostrar que a inclinação deste triângulo é compatível com a integral acima.

Circuito Integrador: objetivos

- Determine também para qual intervalo de freqüências o seu circuito é um bom integrador. Justifique.
- Procure comparar os seus resultados com os do resto da sala.

Circuito RC: resumo dos objetivos da semana

- Após montar o circuito, para estimar ω_c a partir dos valores nominais,
  - Medir freqüências em um intervalo pelo menos **1** ordem de grandeza menor que ω_c até **1-2** ordens de grandeza maior que ω_c.
  - **USAR ONDAS SENOIDAIS**

- Para cada valor de freqüência medir:
  - **V_e** (tensão de pico na entrada)
  - V_R (tensão de pico no resistor)
  - $V_C = V_s$ (tensão de pico no capacitor)
  - Intervalo de tempo entre V_e e V_C
  - Intervalo de tempo entre V_R e V_C

circuito RC: resumo dos objetivos da semana

- Com base nos dados anteriores entregar:

- Gráfico de Z_C experimental em função de ω
  - lembre-se que **Z=Tensão/corrente** $\rightarrow$ $Z = 1/\omega C$
  - Obter o valor da capacitância deste gráfico
- Gráfico de ϕ_C (fase do capacitor) em função de ω
  - Comparar com o esperado teoricamente para o capacitor
- Gráfico de G_0 em função de ω
  - Comparar com o esperado teoricamente
- Gráfico de ϕ_G (fase entre V_s e V_e) em função de ω
  - Comparar com o esperado teoricamente

Circuito Integrador: resumo dos objetivos

- Para freqüências tais que ω**>>**ω_c, mostrar que:

$$\hat{V}_S = \frac{1}{RC}\int \hat{V}_e dt$$

Ve: **ONDA QUADRADA**

- Medir $\mathbf{V_S}$ e $\mathbf{V_e}$
  - Tirar foto do osciloscópio e entregar como atividade
  - Mostrar que $\mathbf{V_S}$ corresponde à integral de $\mathbf{V_e}$:
    - Mostar que $\mathbf{V_S}$ é um triângulo
    - Mostrar que a inclinação deste triângulo é compatível com a expressão acima.
- Determine também para qual intervalo de freqüências o seu circuito é um bom integrador.

FIM