Atmosfera

O problema na atmosfera é que a eq. de Navier-Stokes não é linear:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\underbrace{U \cdot \vec{\nabla} U}_{\text{não linear}} + \nu \nabla^2 U - \frac{\nabla p}{\rho} + g$$

ordem = 2 (deriv)
grau = 2 (poly)

Isso produz caos na solução $\vec{U}(\vec{x},t)$, o que significa que $\vec{U}$ é um escoamento Turbulento. Só em condições especiais observamos um escoamento laminar na atmosfera.

$\vec{U}$ flutua aleatoriamente em escalas de 1mm e 10Hz! Não é possível resolver c/ modelos...

Se o modelo não tem resolução suficiente para resolver todos os vórtices turbulentos na ~~at~~ atmosfera é preciso considerá-los de outra maneira. O que se faz é uma média de Reynolds:

decompomos o campo contínuo $f(x,y,z,t)$ em duas componentes: $\bar{f}$, ~~a~~ média no seu grid-box $(\Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta t)$ e uma flutuação $f' = f - \bar{f}$.

$$N = \bar{N} + N'$$

onde $$\bar{N} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} N(x,y,z,t)\, dx\, dy\, dz\, dt$$

↳ média no grid-box.

$\bar{N}$ ~~...~~ depende do grid-box e do passo de tempo, e é o valor que será previsto pelo modelo!

Por definição N' flutua (+ e −) em torno de $\bar{N}$ e $\overline{N'} = 0$ pois:

$$\overline{N = \bar{N} + N'} \Rightarrow \bar{N} = \bar{\bar{N}} + \overline{N'}$$

$$\cancel{\bar{N}} = \cancel{\bar{N}} + \overline{N'}$$

$$\boxed{\overline{N'} = 0}$$

hipótese de Reynolds

a média das flutuações é nula!

Da mesma maneira, decompomos as velocidades:

$$u = \bar{u} + u' \quad , \quad v = \bar{v} + v' \quad e \quad w = \bar{w} + w'$$

$$\vec{v} = \overline{\vec{v}} + \vec{v}'$$

Podemos estimar os efeitos dos movimentos sub-grade substituindo as decomposições nas eq. originais.

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} N) = D \nabla^2 N + \sum R_n$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{N} + N') + \nabla \cdot \left\{ (\bar{v} + v')(\bar{N} + N') \right\} = D \nabla^2 (\bar{N} + N') + \sum R_n$$

Tomando a média no tempo e no espaço, temos: (as médias e as derivadas são operadores lineares e podem ser trocados):

$$\overline{\frac{\partial(\bar{N} + N')}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{(\bar{N} + N')} = \frac{\partial \bar{\bar{N}}}{\partial t} + \cancelto{0}{\frac{\partial \overline{N'}}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{N}}{\partial t}$$

$$\overline{\nabla^2(\bar{N} + N')} = \nabla^2 \overline{(\bar{N} + N')} = \nabla^2 \bar{\bar{N}} + \cancelto{0}{\nabla^2 \overline{N'}} = \nabla^2 \bar{N}$$

Sempre temos que os termo com apenas uma flutuação ~~zeram~~. Apenas os cruzados irão sobreviver:

$$\overline{\nabla\cdot(\vec{v}N)} = \nabla\cdot\overline{\{\bar{v}\bar{N} + \bar{v}N' + v'\bar{N} + v'N'\}} =$$

$$= \nabla\cdot\{\overline{\bar{v}\bar{N}} + \overline{\bar{v}N'} + \overline{v'\bar{N}} + \overline{v'N'}\}$$

$$= \nabla\cdot\{\bar{\bar{v}}\bar{\bar{N}} + \bar{v}\underbrace{\cancel{\overline{N'}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\overline{v'}}}_{0}\bar{\bar{N}} + \overline{v'N'}\}$$

$$= \nabla\cdot\{\bar{v}\bar{N} + \overline{v'N'}\}$$

O termo $\overline{\vec{v}'N'}$ representa um transporte devido aos movimentos turbulentos subgrade. É o fluxo turbulento cinemático. Assim a equação fica:

$$\frac{\partial\bar{N}}{\partial t} + \nabla\cdot(\bar{v}\bar{N}) + \nabla\cdot(\overline{v'N'}) = D\nabla^2\bar{N} + \sum R_m$$

Se não estivermos tratando da escala de movimento molecular, então $\nabla\cdot\overline{v'N'} \gg D\nabla^2\bar{N}$ e podemos desprezar a difusão:

$$\frac{\partial\bar{N}}{\partial t} + \underbrace{\nabla\cdot(\bar{v}\bar{N})}_{\text{advecção devido ao vento médio}} + \underbrace{\nabla\cdot(\overline{v'N'})}_{\text{transporte turbulento}} = \sum R$$

Poderíamos fazer a mesma dedução p/ a eq com a densidade do ar.

$$\frac{\partial \overline{\rho_a}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{v}\,\overline{\rho_a}) + \nabla \cdot \left(\overline{v'\rho_a'}\right) = 0$$ pois não há fontes de ar ...

Poderíamos fazer o mesmo também p/ a concentração específica:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v \cdot \nabla q = \sum Q_n \quad , \quad Q_n \equiv \frac{\text{Kg vapor}}{\text{Kg ar}}\, s^{-1}$$

Mas teríamos um termo em $\overline{v' \cdot \nabla q'}$ que não teria a forma genérica de um fluxo turbulento $\overline{u'q'}$ ... Vamos deduzir a partir da equação p/ o N:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (v N) = \sum R_n \quad , \quad R_n \equiv \# \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3} / s$$

Pois sabemos que:

$$N = \frac{A}{m} \rho_a q$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_a q}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a v q) = \rho_a \sum Q_n = \frac{m}{A} \rho_a \sum R_n$$

Vamos desprezar as flutuações na densidade do ar pois $\rho_a' << \overline{\rho_a}$ na atmosfera, ou seja:

$\rho_a \simeq \overline{\rho_a}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{\rho}_a\,(\bar{q}+q')\right] + \nabla\cdot\left[\bar{\rho}_a\,(\bar{v}+v')(\bar{q}+q')\right] = \bar{\rho}\,\Sigma Q_n$$

Tomando a média, Temos:

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{q})} + \underbrace{\cancel{\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}q')}}}_{0} + \nabla\cdot\left\{\bar{\rho}\,\overline{\left[\bar{v}\bar{q} + \underbrace{\cancel{\bar{v}q'}}_{0} + \underbrace{\cancel{v'\bar{q}}}_{0} + v'q'\right]}\right\} = \bar{\rho}\,\Sigma \overline{Q_n}$$

$$\overbrace{\bar{\rho}\,\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{q}\,\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}} + \nabla\cdot\left\{\bar{\rho}\,\bar{v}\bar{q} + \bar{\rho}\,\overline{v'q'}\right\} = \bar{\rho}\,\Sigma \overline{Q_n}$$

Usando a eq p/ a densidade do ar:

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\rho}_a}{\partial t} + \nabla\cdot(\bar{v}\,\bar{\rho}_a) + \underbrace{\cancel{\nabla\cdot(\overline{v'\rho_a'})}}_{\simeq 0} = 0}$$

Temos:

$$\bar{\rho}\,\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} - \cancel{\bar{q}\,\nabla\cdot(\bar{v}\bar{\rho})} + \nabla\cdot(\bar{\rho}\,\overline{v'q'}) + \overbrace{\bar{\rho}\bar{v}\cdot\nabla\bar{q} + \cancel{\bar{q}\,\nabla\cdot(\bar{\rho}\bar{v})}} = \bar{\rho}\,\Sigma \overline{Q}$$

$$\cancel{\bar{\rho}}\,\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \cancel{\bar{\rho}}\,\bar{v}\cdot\nabla\bar{q} + \frac{\nabla\cdot(\bar{\rho}\,\overline{v'q'})}{\bar{\rho}} = \cancel{\bar{\rho}}\,\Sigma \overline{Q}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \underbrace{\bar{v}\cdot\nabla\bar{q}}_{\text{advecção}} + \frac{1}{\bar{\rho}}\,\nabla\cdot\Big(\bar{\rho}\,\underbrace{\overline{v'q'}}_{\text{fluxo turbulento de concentração específica!}}\Big) = \Sigma \overline{Q_n}}$$

Mas como o modelo pode calcular a contribuição $\overline{v'q'}$ do fluxo turbulento se ele não conhece v' e q' ??

Precisamos parametrizar! Isso é feito usando a teoria-K, ou teoria do transporte dos gradientes. Fazendo uma analogia com a lei de Fick:

$$\text{Flux Difusivo} = -D \nabla N$$ (levou ao termo $+D\nabla^2 N$)

Assumimos que o fluxo turbulento $\overline{v'q'}$ é proporcional ao ∇q:

$$\begin{cases} \overline{u'q'} = -K_x \nabla q \\ \overline{v'q'} = -K_y \nabla q \\ \overline{w'q'} = -K_z \nabla q \end{cases} \qquad [K] = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix}$$

unidades: m^2/s

K é a matriz de difusão e K_x, K_y, K_z são os <u>coeficientes</u> de <u>difusão</u> <u>turbulenta</u>.

- Os termos cruzados dão uma covariância entre o transporte turbulento em direções diferentes e em geral é assumido <u>zero</u>
- A diagonal dá o transporte do gradiente devido a mistura turbulenta.

Independente de qual eq estamos tratando, a turbulencia é sempre feita em $\underline{q}$:

$$\vec{F}_{\underline{turb}} = -\rho_a \overleftrightarrow{K} \vec{\nabla} q$$

pois como o $\underline{ar}$ é $\underline{compressível}$ um gradiente em $\underline{N}$ pode não significar uma concentração específica $\underline{diferente}$!

Assim, a eq de conservação fica:

$$\boxed{\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{q} = \frac{1}{\rho_a} \vec{\nabla} \cdot \left(\rho_a \overleftrightarrow{K} \vec{\nabla} q \right) + \sum \overline{Q_n}}$$

Para N a equação seria:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \bar{N}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\rho_a \overleftrightarrow{K} \vec{\nabla} \left(\frac{N}{\rho_a} \right) \right) + \sum \overline{R_n}$$

esses são os termos de difusão!

$\Rightarrow$ o exercício da aula passada estava errado, pois não incluímos difusão...