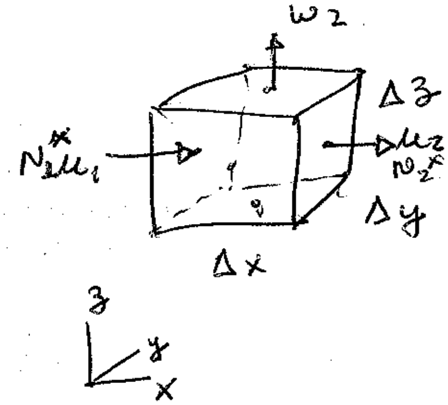
AULA3 Continuidade e termo

Consideramos um volume imaginário onde não há nenhum processo físico/químico alterando ~~os~~ o ar. Neste caso, cada molécula de ar é conservada.



O número de moléculas dentro do volume será também conservado a menos que o vento esteja modificando seu conteúdo.

$$\begin{cases} \# \text{ moléculas na caixa} = N \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \\ N \text{ concentração em número} \end{cases}$$

Δx, Δy e Δz são fixos, então a variação na caixa é simplesmente:

$$\Delta N \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

O transporte do vento vai resultar em um fluxo de partículas pelas paredes da caixa:

$$\text{fluxo } [\#/m^2/s] = N \cdot \text{velocidade}$$

Para calcular o # que ~~entrou no~~ cruzou a parede, precisamos da área e do tempo

$$\text{através da parede } [\#] = N \cdot \text{vel} \cdot \text{área} \cdot \text{tempo}$$

Assim o nº de partículas vai mudar:

$$\Delta N\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z = (N_1^x u_1 - N_2^x u_2)\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta t$$
$$+ (N_1^y v_1 - N_2^y v_2)\, \Delta x\, \Delta z\, \Delta t$$
$$+ (N_1^z w_1 - N_2^z w_2)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta t$$

Dividindo por Vol. Δt, Temos:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N_1^x u_1 - N_2^x u_2}{\Delta x} + \frac{N_1^y v_1 - N_2^y v_2}{\Delta y} + \frac{N_1^z w_1 - N_2^z w_2}{\Delta w}$$

Tomando os limites $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$,

Temos uma diferencial

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Nu) - \frac{\partial}{\partial y}(Nv) - \frac{\partial}{\partial z}(Nw)$$

$$\boxed{\frac{\partial N}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot(N\vec{v})}$$

Isso é como a expressão de conservação da carga, por exemplo, onde o fluxo local de carga é a densidade de corrente $\vec{J}$:

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{J}}$$ conserv. de carga

Significa

Só há variação local de uma quantidade se houver divergência do seu fluxo.

Como a massa de cada molécula não muda, então podemos escrever a conservação da densidade:

$$\rho = \frac{N\, m_i}{A} \text{ (cte)} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot(\rho \vec{v})}$$

Essa é a forma da eq. da continuidade c/ a divergência do fluxo. Há outras formas de se escrever.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho\vec{v}) = -\rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho$$

Mas a derivada total é:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\equiv \boxed{\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho}$$

alguns livros usam essa notação

lagrangeano | euleriano

Substituindo:

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} = -\rho \nabla\cdot v - \left(\frac{d\rho}{dt} - \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla\cdot\vec{v}}$$

se o fluido for incompressível $\nabla\cdot v = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{D\rho}{Dt} = 0}$

Essa é a forma com a divergência da velocidade. O termo d/dt é a variação seguindo a partícula, enquanto os termos $\partial/\partial x$ são "parados", ou locais.

Em termos da concentração específica q (Kg do traçador pela Kg da massa total de ar), a equação da continuidade fica:

$$\rho_{gás} = q_{gás}\, \rho_{ar\text{-}total}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(q\rho_a)}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\,\rho_a q)$$

$$q \cancel{\frac{\partial \rho_a}{\partial t}} + \cancel{\rho_a} \frac{\partial q}{\partial t} = -q \cancel{\vec{\nabla}\cdot(\rho_a \vec{v})} - \cancel{\rho_a}\, \vec{v}\cdot\vec{\nabla} q$$

pela eq continuidade p/ ar

Portanto:

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t} = -\vec{v}\cdot\vec{\nabla} q}$$

Como a derivada total é:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \vec{\nabla}, \quad \text{então temos:}$$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} = 0}$$

Isto significa ~~de~~ que se não há fontes ou sumidouros, a concentração específica é conservada ao longo da trajetória da ~~partícula~~ parcela de ar.

DETALHES

① Essa dedução é fácil de entender mas deixamos passar alguns detalhes. A lei básica de conservação é:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot \text{Fluxo}$$

~~Mas~~ Mas assumimos que Fluxo = N · Vento. Também há um fluxo devido a difusão molecular, que é dado pela lei de Fick:

$$\underset{\#m/s}{\vec{F}_{dif}} = -\underset{m^2/s}{D}\,\vec{\nabla}\underset{\#/m}{N}$$

D é o coeficiente de difusão molecular $\sim 0.2\ \mathrm{cm^2/s}$

(2) Além disso, consideramos que não haviam fonte nem sumidouros. Isso não é verdade, mas não invalida em nada nossas deduções.

Assim a eq de continuidade, básica é:

$$\boxed{\frac{\partial N}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot(N\vec{v}) + D\nabla^2 N + F - S}$$ completo

onde F e S (#/s) são as fontes e sumidouros.

Escrevemos em geral:

$$F - S \equiv \sum_{i=1}^{N} R_i \qquad N \text{ processos} \begin{cases} \text{química} \\ \text{radiação} \\ \text{turbulência} \\ \text{convecção} \\ \vdots \end{cases}$$

Além disso o termo de difusão geralmente pode ser desprezado pois na Troposfera e estratosfera não é importe.

Einstein's (Browniano) $\Delta t = \frac{\Delta x^2}{2D} = \frac{(10\,m)^2}{2\cdot 0.2\,cm^2/s} \simeq 2,5\times 10^6\,s$

$\sim$ 30 dias p/ andar 10 m

Como as velocidades são muito menores, o termo em $\nabla^2 N$ é geralmente desprezado.

Em torno de 100 km $D \gg D_{superf}$ pois a pressão $\ll P_{atm}$ (maior livre caminho médio). Então a dif é importante!

Analogamente, escrevemos:

$$\frac{dq}{dt} = \sum R' \quad , \text{ onde } R' \text{ é } R \text{ em unidades de concentração específica}$$

Notem que esta eq está na forma lagrangeana, isto é, seguindo o fluido, devido ao d/dt.
Ela é válida com a ~~co~~ concentração específica, e não c/ o número ou a densidade, pois esses dois mudam ao longo da trajetória da parcela quando P, T mudam!

A simplicidade dessa equação é o que está ~~por trás~~ nas bases dos modelos de parcela que seguem parcelas de ar, isoladas, e descrevem o que acontece c/ a química/microfísica ao longo da trajetória.

Estes modelos tem problemas:

1. não permitem a mistura de volumes
2. ainda é preciso um referencial euleriano, fixo na Terra, p/ representação geográfica.

Geral

A eq. da continuidade representa a conservação de massa no nosso sistema. Ela é ~~tempo~~ semelhante a eq de conservação de momentum:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla\cdot(N\vec{v}) + D_N\nabla^2 N + F_N - S_N \quad \text{(massa)}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\vec{v}\cdot\nabla q + D_q\nabla^2 q + F_q - S_q \quad \text{(razão de mistura)}$$

Navier-Stokes
$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\vec{U}\cdot\vec{\nabla}\vec{U} + \nu\nabla^2 U - \frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{g} \quad \text{(momento)}$$

$\boxed{U\cdot\nabla U}$ é o termo de advecção semelhante ao que aparece na eq para a concentração específica pois assim como q, U não muda se P e T variarem

$\boxed{\nu\nabla^2 U}$ é o termo de difusão e também pode ser desprezado em várias situações.

$\boxed{\frac{\nabla P}{\rho}}$ é a força gradiente de pressão e $\boxed{\vec{g}}$ é a gravidade, elas funcionam como fontes e sumidouros de momento, já que $\vec{F} = d\vec{P}/dt$ pela 2ª lei de Newton.