CAOS

FÍSICA DO MEIO AMBIENTE

Aula baseada nas notas de Lab. Fisica 4

Prof. Henrique Barbosa
hbarbosa@if.usp.br
Ramal: 6647
Basílio, sala 100

Tópicos para o trabalho final

Fotossíntese IAG – Humberto Rocha	Cleberson e Cesar	Jimmy e Kaue
Circulação termoalina IO – Edmo Campos		Carmen e Robson
Fontes de energia. IEE – Roberto Ziles	Amanda e Giovanni	Celso e Fábio
Fenômeno El Niño IAG – Tércio Ambrizzi		Gustavo e Jeferson
Ciclo do Carbono IF – Paulo Artaxo	Pedro e Luiz	Jorge e Ezequías
Economia do Carbono IEE – Ildo Sauer		José Aldeni e ???
Ciclos de Milankovitch IAG – Márcia Yamasoe	Priscilla e Júlio Cesar	

Aula de Hoje

- Introdução a caos e sistemas caóticos
- Estudo de crescimento de populações
  - Mapa logístico

O que é Caos ?

Quais são os limites para a dinâmica (evolução temporal) de um sistema físico?

Comportamento regular rígido

- Pêndulos (relógio)
- Sistema massa-mola
- Queda livre

Sistemas que apresentam Caos

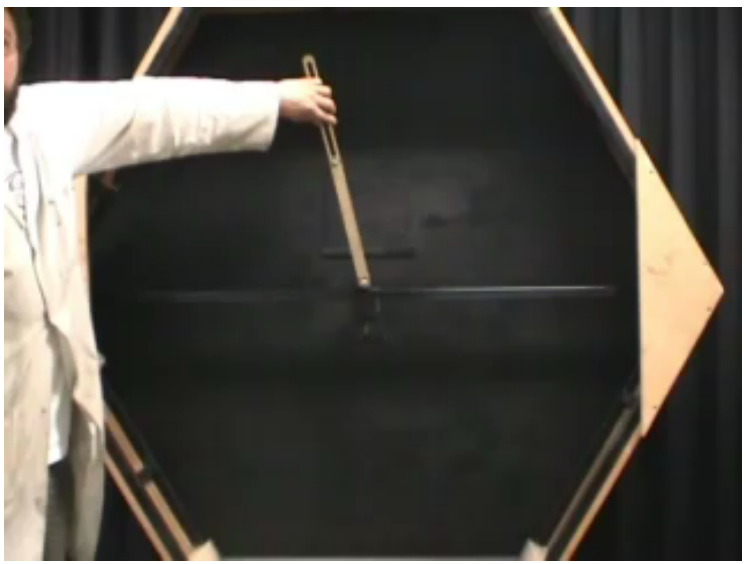
- Clima
- Crescimento populacional
- Pêndulo duplo

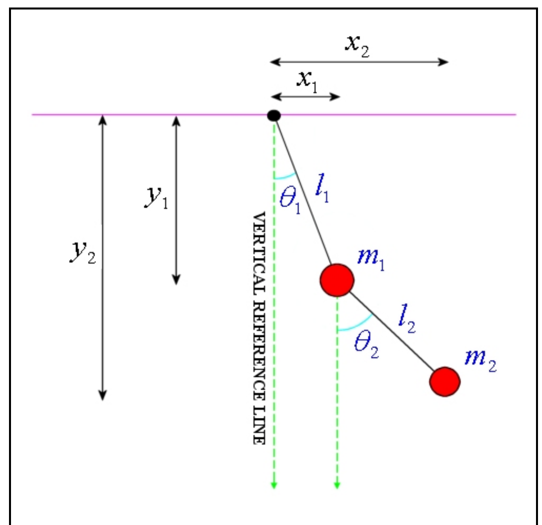
Comportamento totalmente aleatório

- Jogo de dados
- Decaimento radioativo
- Movimento Browniano

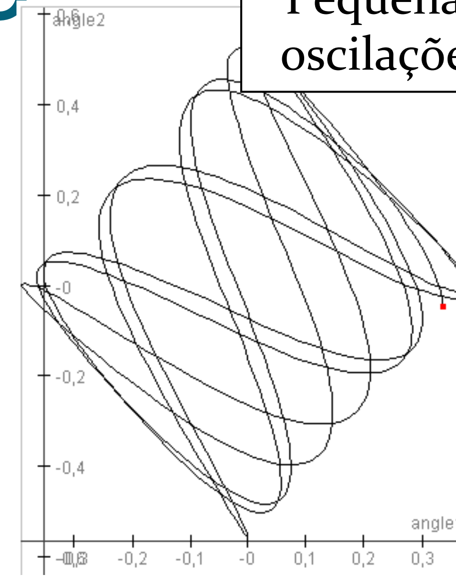
Exemplo: Pêndulo Duplo

- Um pêndulo amarrado no outro
  - O espaço de fase é composto pelos 2 ângulos e as 2 velocidades

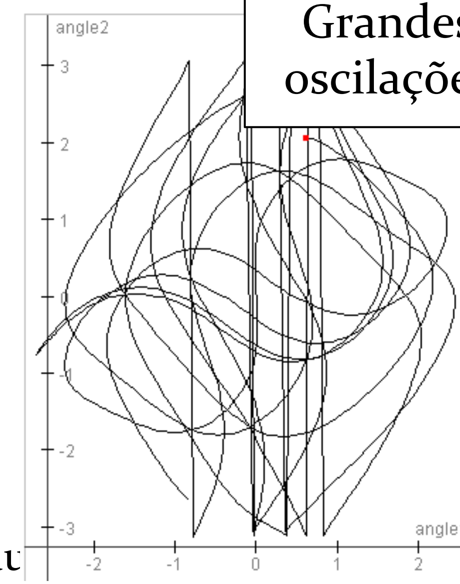




Pequenas oscilações



Grandes oscilações



http://physlab.net/dbl_pendulum.html http://lecturedemo.ph.unimelb.edu
Mn-1-Chaotic-Double-Pendulum

Algumas Definições Necessárias

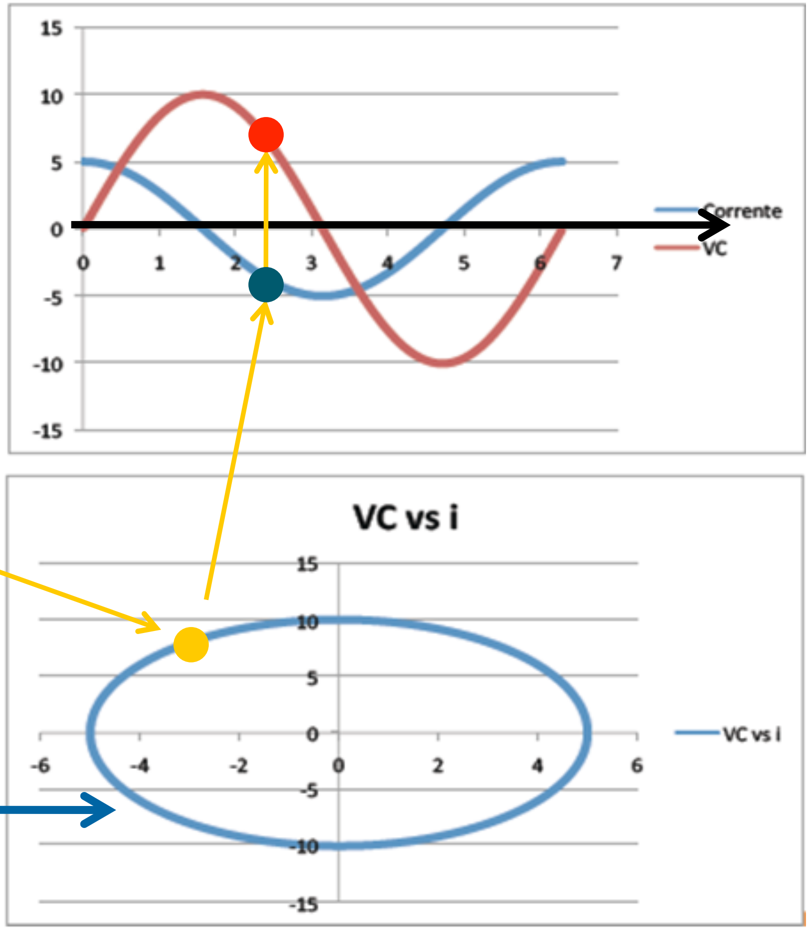
Sistema dinâmico – é qualquer sistema cuja evolução a partir de uma determinada condição inicial é regida por um conjunto de regras. Essas regras podem se resumir a um conjunto de equações diferenciais, que é o caso para sistemas contínuos.

Espaço de fase – é o espaço no qual todos os possíveis estados de um sistema são representados.
Ex: No pêndulo duplo teria 4 dimensões:

$$\theta_1, \theta_2, \theta_1' \text{ e } \theta_2'$$

Estado – é uma possível condição para o sistema, isto é, uma configuração de variáveis que represente uma condição fisicamente possível ou aceitável.

Retrato de fase – é o conjunto de todos os estados possíveis do sistema dinâmico em questão. Os retratos de fase para sistemas contínuos são trajetórias no espaço de fase.



Algumas Definições Necessárias

- **Um sistema dinâmico que descreve um sistema físico real** depende de um ou mais parâmetros chamados de **parâmetros de controle**.

- Por exemplo: a **freqüência natural de oscilação** é um parâmetro de controle de um oscilador harmônico simples.

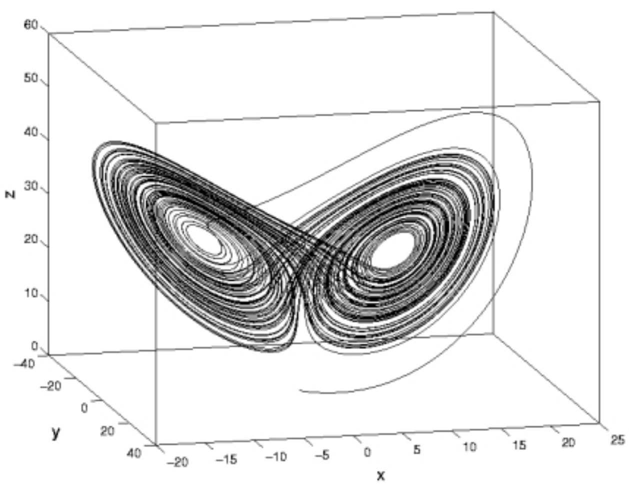
- Um sistema dinâmico pode, portanto, ser pensado como função do parâmetro de controle. De fato, pode-se **influir no comportamento dinâmico do sistema alterando-se o valor de um parâmetro de controle**.

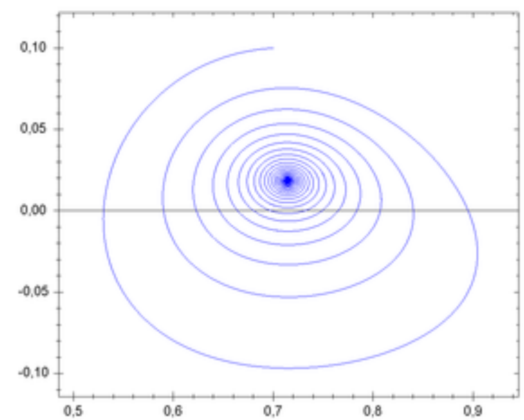
CAOS: Principais características

- **Não linearidade**. Se o comportamento de um sistema for linear, esse sistema não pode ser caótico
- **Sensibilidade a condições iniciais**: pequenas alterações nas condições iniciais podem levar a comportamentos radicalmente diferentes do sistema em seu estado final. É o chamado "efeito borboleta". Os sistemas caóticos também apresentam sensibilidade aos parâmetros de controle.
- **Determinismo**: existem regras subjacentes determinísticas (e não probabilísticas) que todo estado futuro do sistema deve obedecer
- **Manutenção da irregularidade no comportamento do sistema**. Há uma ordem oculta que inclui um número grande de configurações periódicas ocultas na infra-estrutura desses sistemas: há uma "ordem na desordem".
- **Previsão de longo prazo impossível:** em decorrência da sensibilidade às condições iniciais, a previsão (mas não o controle) do comportamento de sistemas caóticos de **longo prazo é impossível**, porque as condições iniciais são conhecidas com grau de precisão finito.

CAOS: Como são as trajetórias no espaço de fase?

- **Existem 3 possibilidades para essas trajetórias**:
  - as trajetórias tendem a se concentrar numa determinada região do espaço de fase e não saem mais de lá: esses são chamados de estados assintóticos do sistema ou **atratores**.

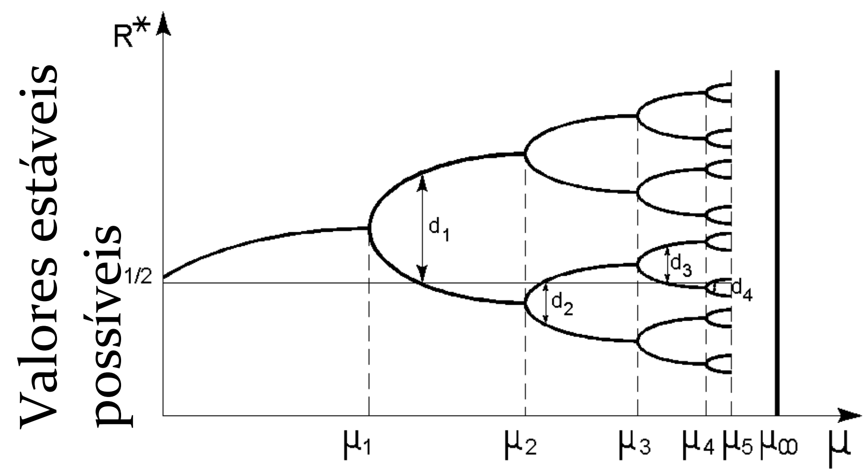




  - as trajetórias tendem a se afastar uma das outras e vão para o infinito
  - as trajetórias ficam "passeando" por todo o espaço de fase

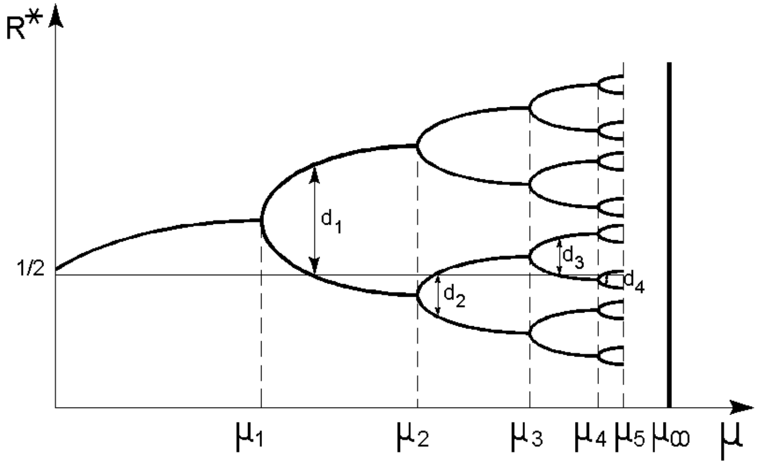
CAOS: Como se chega lá?

- **Bifurcações** – Vamos supor que um sistema dinâmico tenha um parâmetro de controle μ.
  - Variando-se μ podem aparecer novos padrões de comportamento ou seqüências de novos estados estáveis(atratores) para o sistema.
  - Neste caso diz-se que ocorreram **bifurcações** e $\boldsymbol{\mu_n}$ é o valor do parâmetro de controle para o qual ocorreu a n-ésima bifurcação.
  - Em outras palavras, variando-se μ pode-se variar tanto a posição quanto as características qualitativas dos pontos de equilíbrio estáveis (atratores) do sistema.



CAOS: Como se chega lá?

- Nesse caso uma solução estável do sistema perde a estabilidade com a variação de um parâmetro de controle e aparece uma nova solução estável com o dobro do período da solução anterior.
  - Então diz que para **$\mu=\mu_n$** houve uma bifurcação porque o "período" duplicou. Essas soluções são estados assintóticos do sistema, geralmente chamados de **atratores**.
- Rota mais comum para o caos (**cenário de Feigenbaum**) é a duplicação dos atratores



Caos: a constante de Feigenbaum

- A cascata de bifurcações apresentadas pelos sistemas que se encaminham para o caos via **cenário de Feigenbaum** tem certas propriedades de caráter universal:
  - verifica-se que os valores de μ_n onde ocorrem bifurcações obedecem a uma lei de escala:

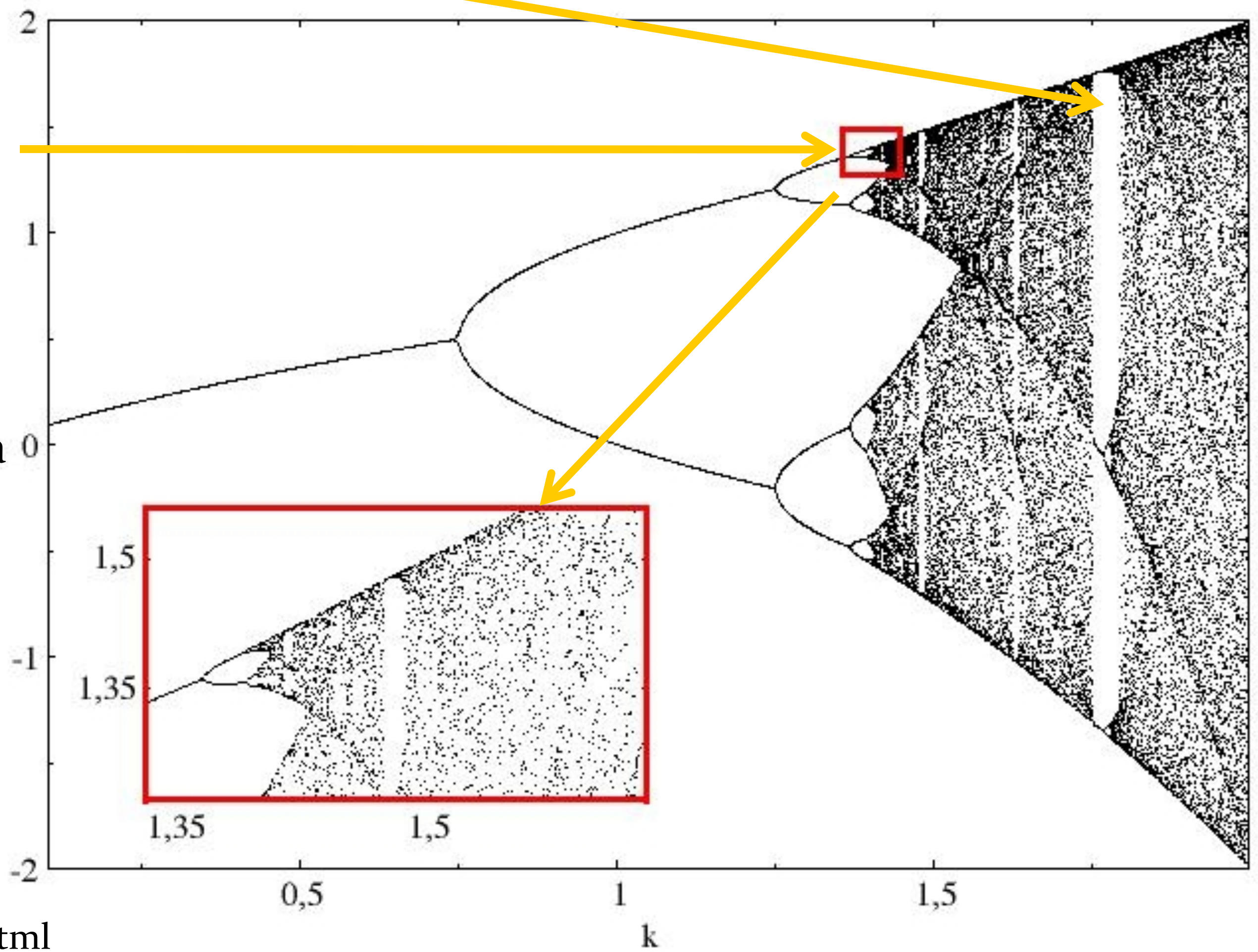
$$\lim_{n\to\infty} = \frac{(\mu_n - \mu_{n-1})}{(\mu_{n+1} - \mu_n)} = \delta \qquad \delta = 4{,}6692016091029909\ldots$$

- <u>δ é uma constante universal para sistemas que apresentam duplicação de período</u>

Caos e Fractais

- A sucessão de dobramentos do período acaba levando ao domínio caótico, que *parece* (**mas não é**) uma nuvens de pontos dispersos.
- No meio do caos, há janelas indicando uma dinâmica organizada e previsível.

- Um pequeno pedaço é similar ao diagrama todo ⇒ fractal.
- … Ou melhor: o domínio caótico aparece como uma nuvens de pontos com dimensão fractal no espaço de parâmetros



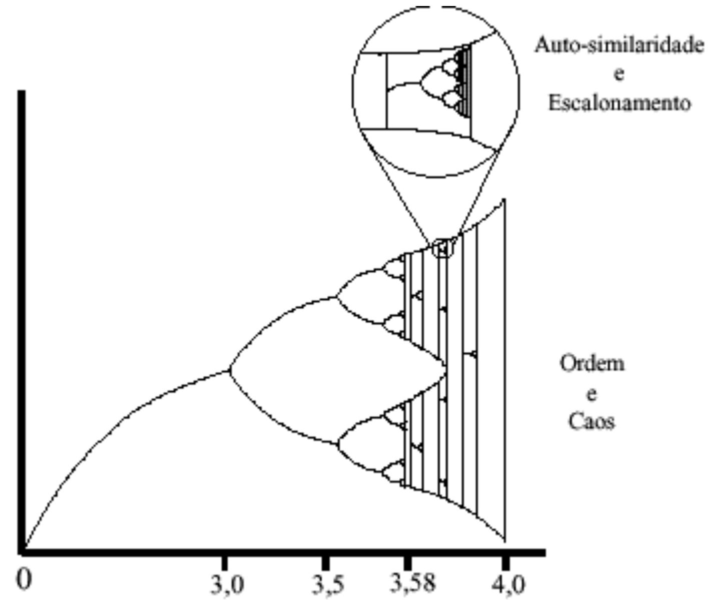
http://complex.upf.es/~josep/Chaos.html

Caos e Fractais

Fractal - é a propriedade de se fraturar em padrões auto-similares e escalonados. Fractais possuem:

- **Auto-similaridade** - existem padrões dentro dos padrões que nunca são exatamente os mesmos mas que são sempre similares (galhos de uma árvore que se bifurcam cada vez mais até chegar nas micro-nervuras da folha, mas que têm praticamente o mesmo padrão de bifurcação).

- **Escalonamento** - quando examinamos os padrões de auto-similaridade em escalas cada vez menores, verificamos que eles são repetições de si mesmos (podemos "enxergar" o padrão de nervuras de uma árvore inteira em qualquer folha desta mesma árvore).



Wagner P. Paiva http://www.cyta.com.ar/ta0203/v2n3a2/v2n3a2.htm

Exemplo Simples de CAOS

- Em 1838, Pierre Verhulst publicou sua "equação logística" para descrever o crescimento de populações, ou a taxa de crescimento em função da população atual e do parâmetro ***r***.

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x), \text{ com } x = \frac{\text{número de indivíduos}}{\text{capacidade do ambiente}}$$

- r é o número malthusiano:
  - Se **r < 0** a população sempre morre com o tempo
  - Se **r > 0** a pode sobreviver
- Essa equação pode ser resolvida de maneira exata e a solução só depende de x_o e de r.

$$x(t) = \frac{1}{1+(x_0^{-1}-1)e^{-rt}}, \text{ função sigmoide}$$

Exemplo Simples

- A equação de **Verhulst** possui inconvenientes para o estudo de evolução de populações pois a população em qualquer instante t depende somente das condições iniciais e é contínua.
- Era desejável haver modelos onde o estágio atual da população dependa apenas da geração anterior e não da condição inicial.
- O **Mapa Logístico** é um análogo discreto no tempo da equação logística e foi popularizado por um paper de 1976 de **Robert May.** Físico teórico australiano, ele começou a trabalhar com biologia quando foi para o Instituto de Estudos Avançados de Princeton em 1971.

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

Só funciona para gerações independentes.
Ex: insetos colocam ovos antes do inverno, que ficam adormecidos em baixas temperaturas, e eclodem com a chegada do calor no ano seguinte...

Exemplo Simples: Mapa Logístico

Crescimento de Populações:

- O mapa logístico descreve o tamanho da populações em função de seu tamanho na geração anterior:

$$x_{n+1} = x_n \cdot r\left(1 - x_n\right)$$

  - x_n são frações da população máxima (capacidade do meio)
  - x_0 é a fração inicial
  - **r** é o potencial biótico e $r(1-x_n)$ é a taxa de crescimento
- Deve-se ter necessariamente **r>0** e **r<4**
- Como é a evolução temporal da população (tamanho das gerações n=1,2,3...) em função da condição inicial X_0 e do potencial biótico?

Calculando o Mapa Logístico(1)

- Na mão:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

x0=0.500 e r=0.5

x1=.5*.5*(1-.5)=.125

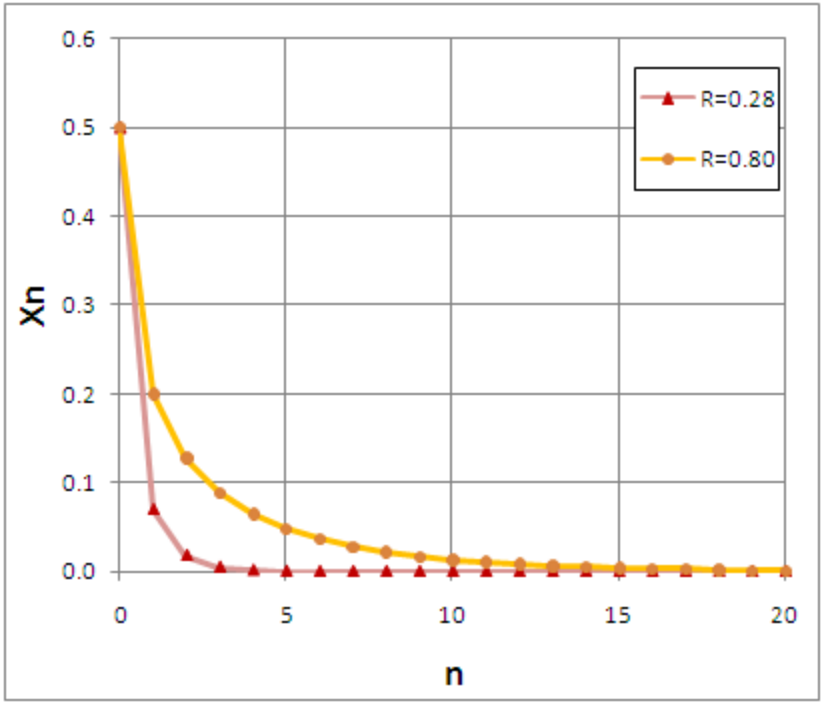
x2=.5*.125*(1-.125)=.055

x3=.5*.055*(1-.055)=.026

x4=.5*.026*(1-.026)=.013

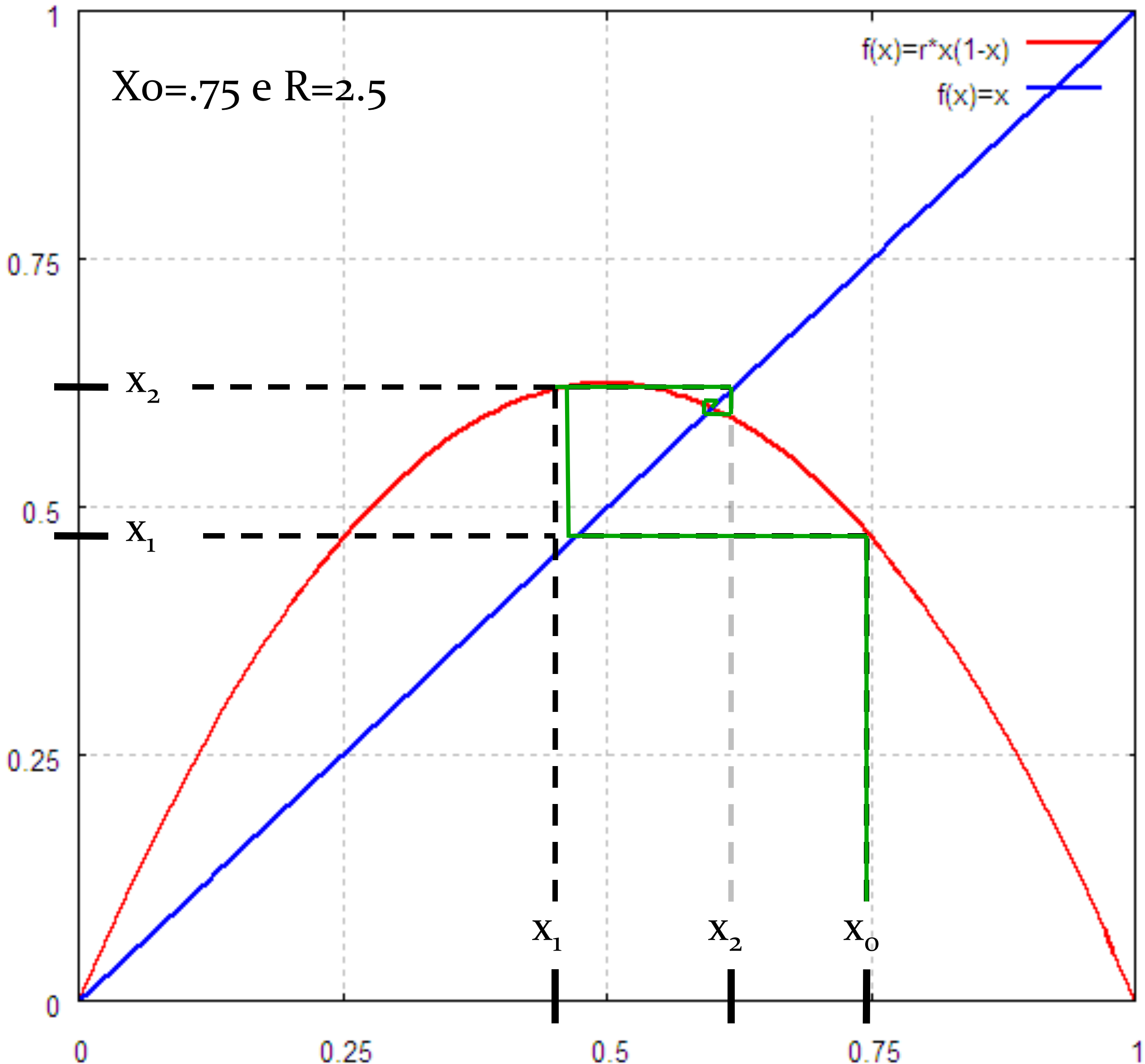
...

x9=0.000



Para estes parâmetros a população não sobrevive

Calculando o Mapa Logístico(2)



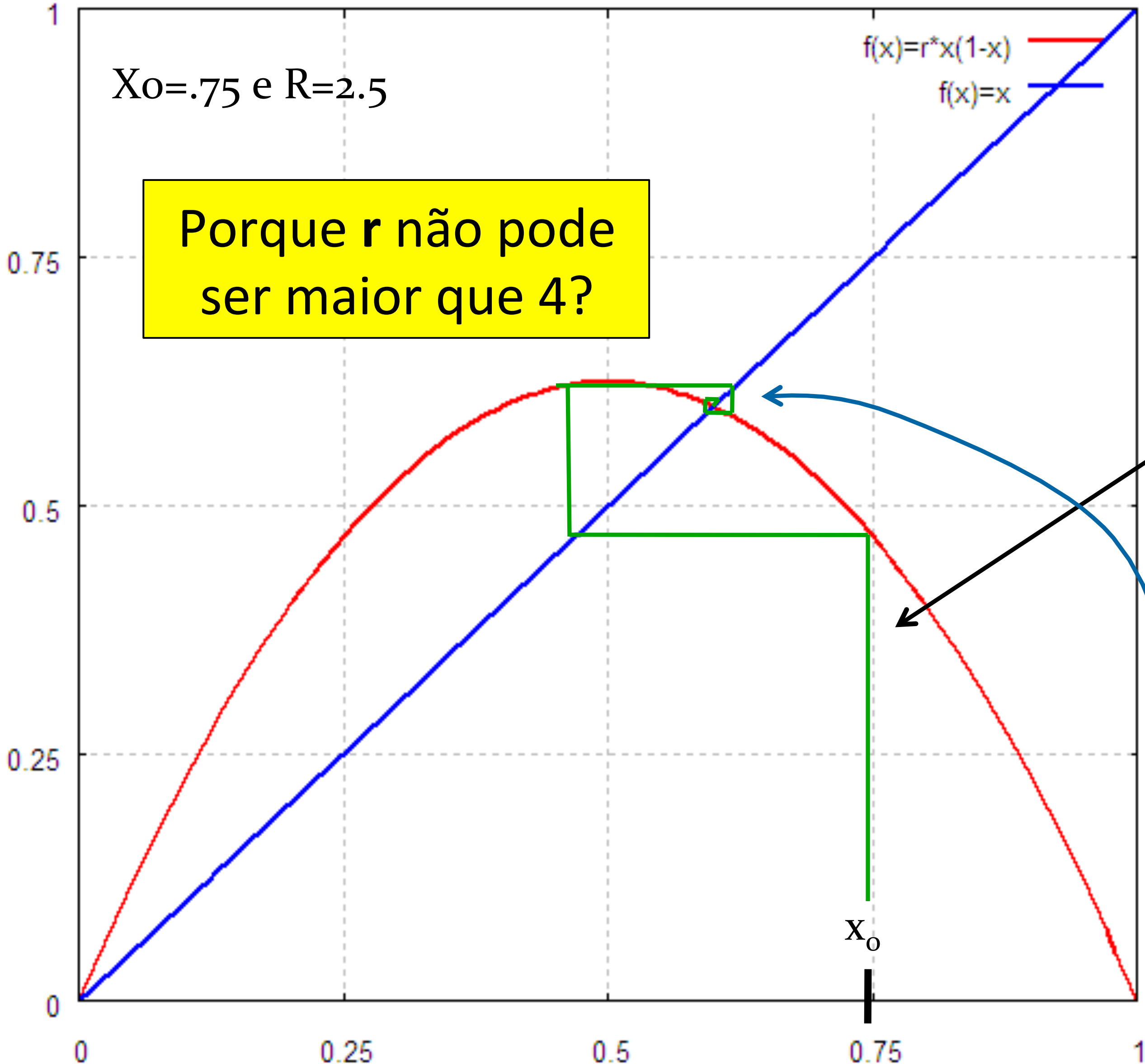
- Meios gráficos:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

1) Calcula-se o valor de $f(x_0)$
2) Rebate-se na reta para ter x_1
3) Calcula-se o valor de $f(x_1)$
4) Rebate-se na reta para ter x_2
5) etc...

A população estabilizou em 0.6

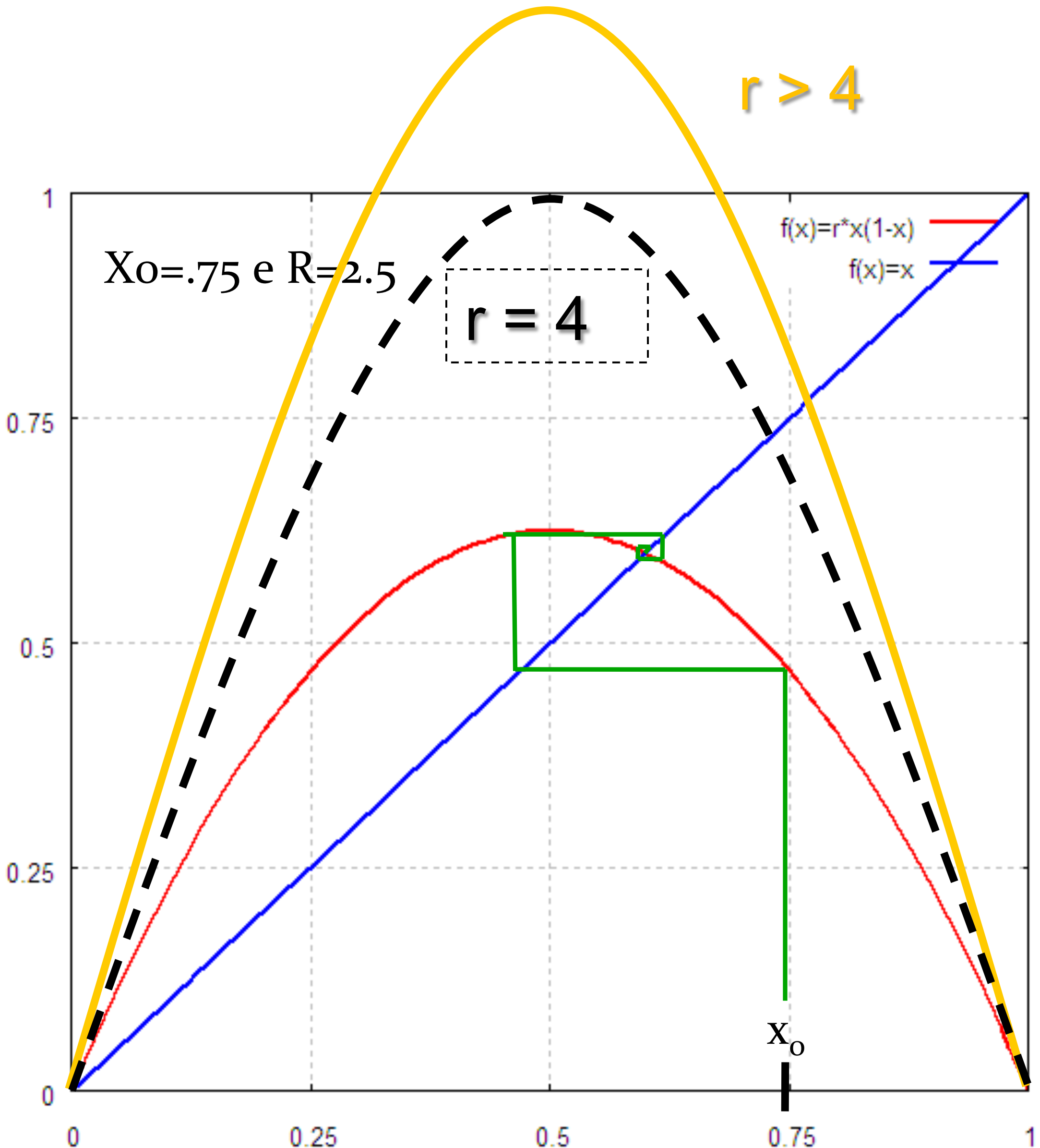
Calculando o Mapa Logístico(2)



IMPORTANTE: O comportamento depende de **r**.

- Transiente:
  - As várias iterações antes da população estabilizar
- Estacionário
  - As iterações depois do transiente

Mapa Logístico - Detalhes



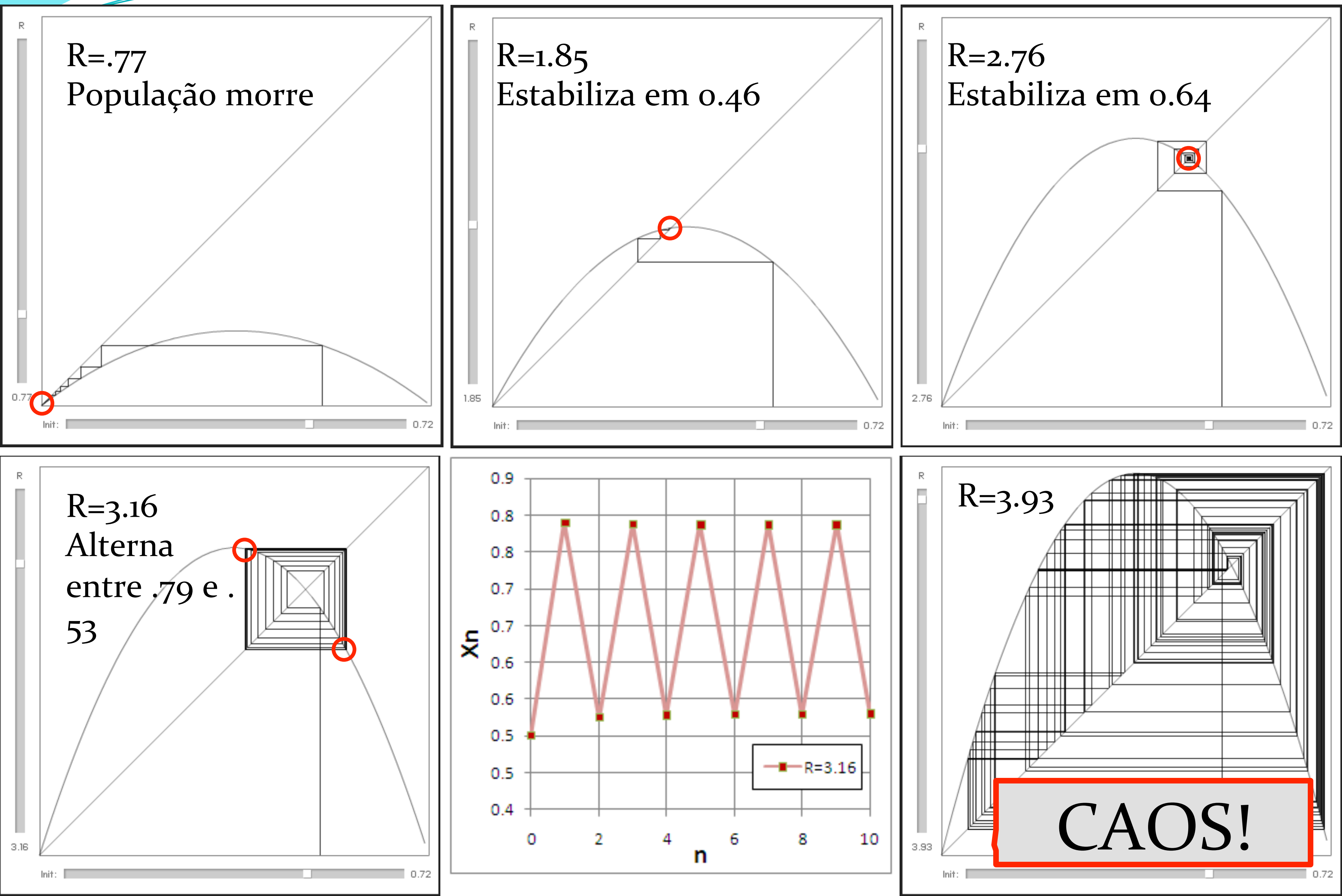
$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Porque 0 < R < 4 ?

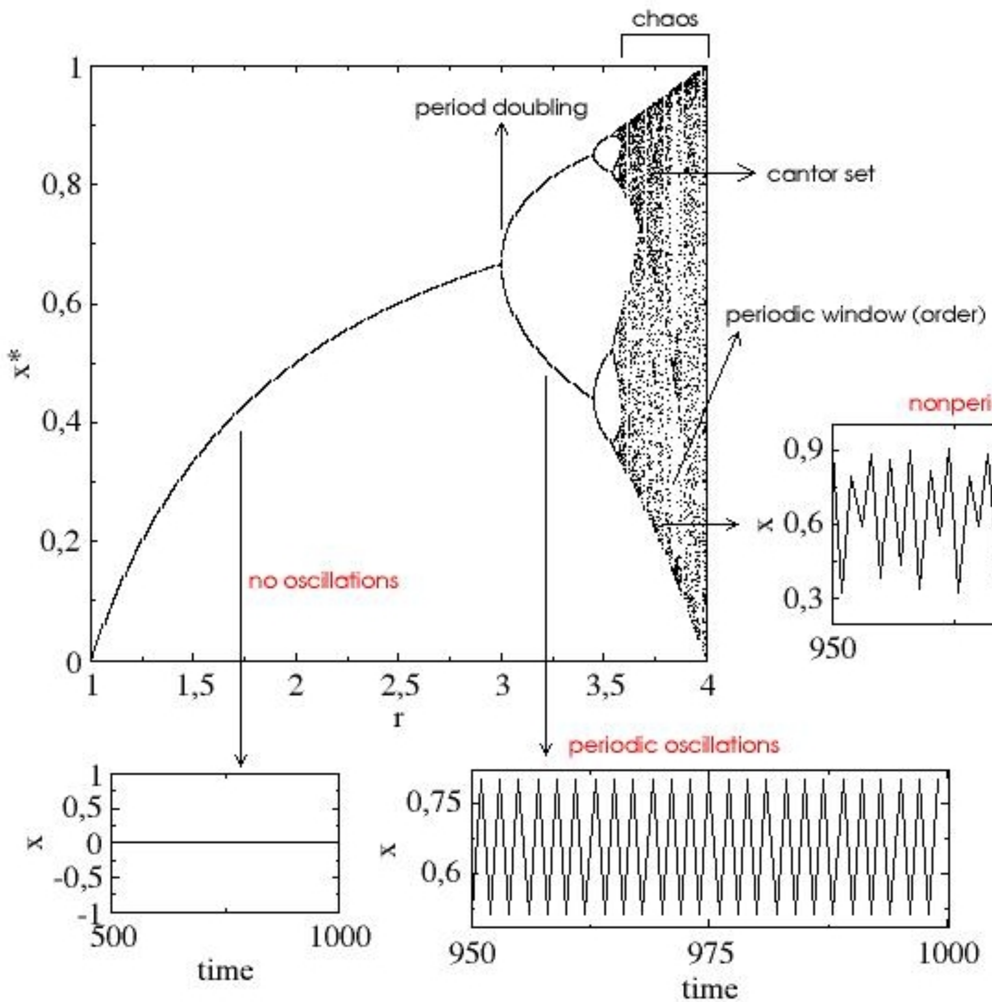
- R<0 => x < 0
- R=0 => x = 0
- R > 4 => x > 1
- R=4 => x=0

MATLAB...

Applet Mapa Logístico – x_0=0.72



O Diagrama de Bifurcação



- Para alguns valores de R o sistema tem um atrator
- Para outros valores, tem dois
- ... a cada bifurcação, dobramos o número de atratores
- ... o que por fim nos leva ao caos!

O Diagrama de bifurcação é um gráfico dos atratores em função do parâmetro de controle

Prevendo os Atratores

- Há uma maneira de prever quais seriam os atratores?
  - Quando chega no atrator qualquer iteração fornece sempre o mesmo valor. Matematicamente:

$$x_{n+1}=x_n \Rightarrow rx_n(1-x_n)=x_n$$

Intersecção da parábola com a reta!

  - As soluções dessa equação são:

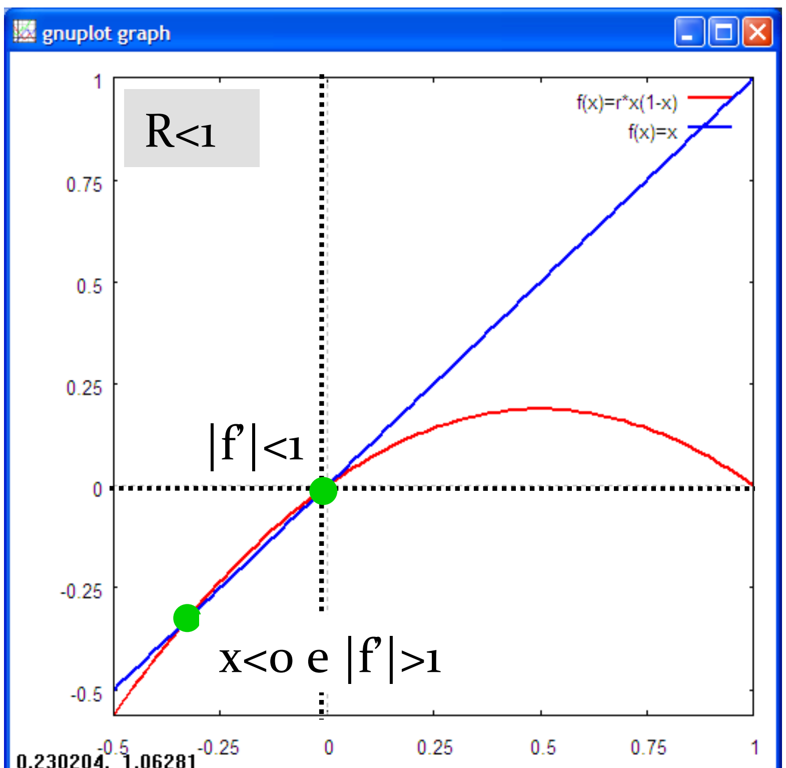
$$x_n=0 \text{ e } x_n=(1-1/r)$$

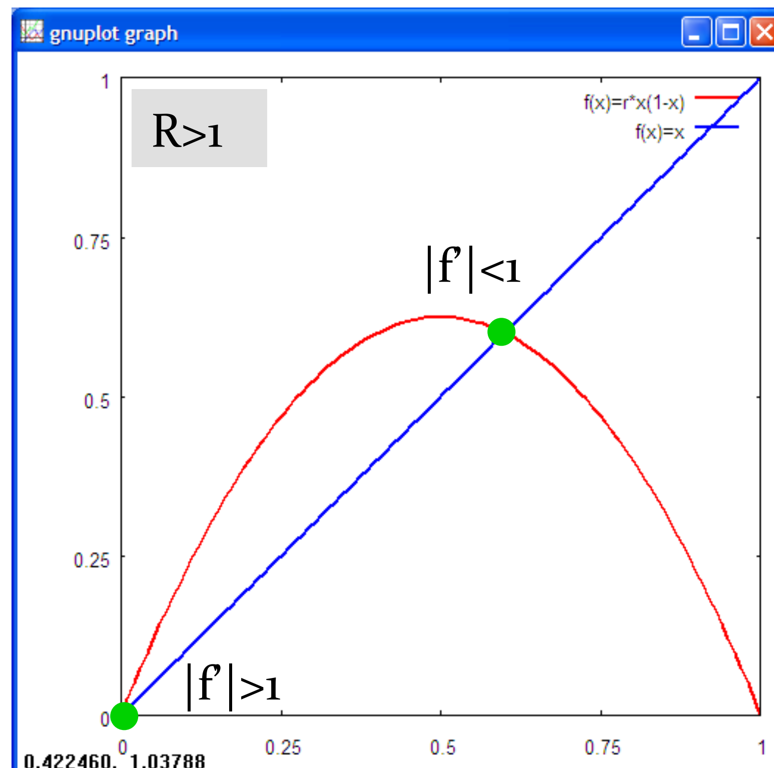
- **Será que ambas as soluções são atratores?**

Prevendo Atratores

- Vimos que para **r<1**, x_n**=0** é o atrator e x_n**=(1-1/r)** não é
- Vimos que para **r>1**, x_n**=(1-1/r)** é o atrator e x_n**=0** não é.
- Onde ocorre essa troca? e qual a condição para ser um atrator?

- Não vamos provar matematicamente, mas a condição para ser um atrator é que **módulo da derivada f'(x_n) seja menor que 1** (ou seja que a parábola não esteja mais inclinada do que a reta)





As Soluções de $x_{n+1}=x_n$

- A derivada é simplesmente:

$$f'(x_n)=r-2rx_n$$

- Caso $x_n \to 0$
  - $f'(0)=r$
  - Para que seja um atrator $|f'| < 1 \Rightarrow -1<r<1$
  - e como $r>0$ então: $0<r<1$
- Caso $x_n \to 1-1/r$
  - $f'(1-1/r)=2-r$
  - Para que seja atrator $|f'|<1 \Rightarrow |2-r|<1 \Rightarrow 1<r<3$

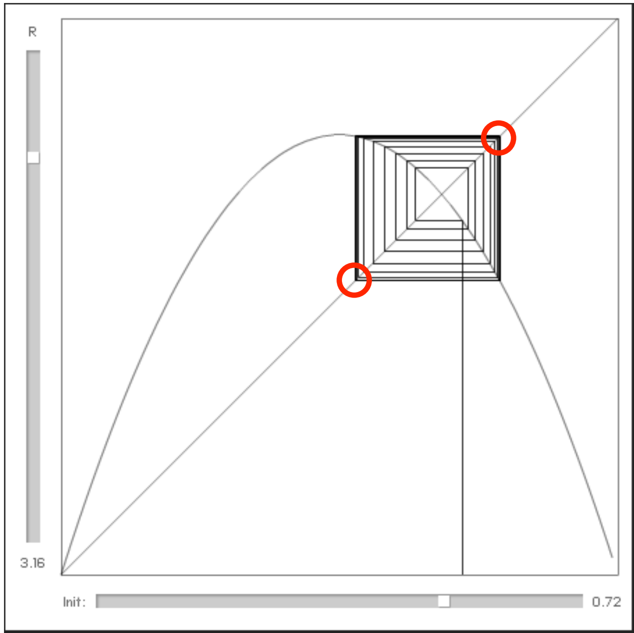
Prevendo 2 Atratores

- Observamos na planilha e no applet que para determinados valores de **r>3**, não tem **1** atrator, mas **2** atratores!
- Como prever isso? Basta usar a condição $x_{n+2}=x_n$, o que significa que a cada duas iterações repete-se um valor

- Vamos calcular:

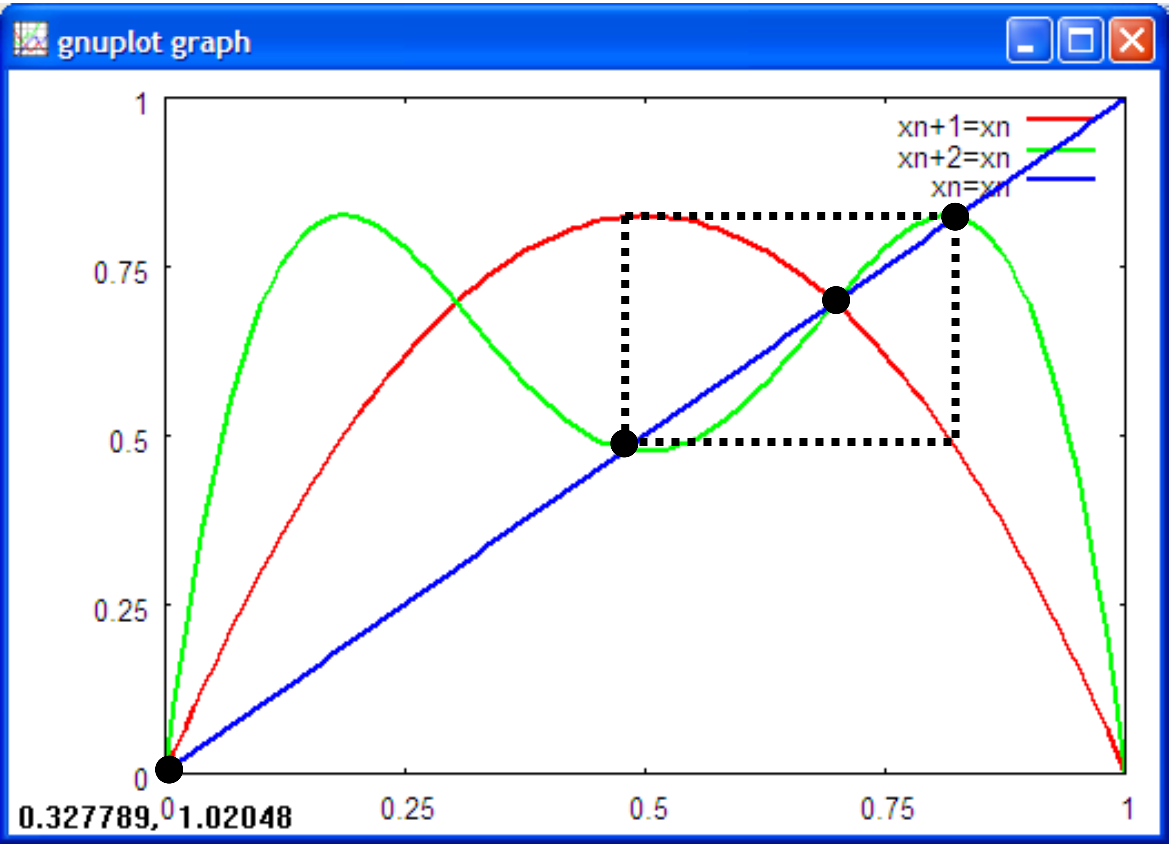
$$
\begin{aligned}
x_{n+2} &= r x_{n+1}\left(1-x_{n+1}\right) \\
&= r\left[r x_n\left(1-x_n\right)\right]\left[1-r x_n\left(1-x_n\right)\right]=x_n
\end{aligned}
$$

- **Ou seja, agora os atratores estão na intersecção da reta com um polinômio de 4º grau.**



As Soluções de $X_{n+2}=X_n$

- No gráfico vemos um exemplo das soluções. Duas delas coincidem com as anteriores, mas neste caso ambas tem **|f'|>1** e não servem.
- As outras duas soluções são:



$$x_n = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

- Aplicando a condição para a existência de atratores:

  $|f'(x_n)|<1$,

- chega-se à conclusão que

  $3<r<(1+\sqrt{6})$

- vocês podem verificar isso com o applet.

leituras

- Artigos:
  - Li and Yorke, *Period Three Implies Caos*, American Mathematical Monthly, v. 82, n. 10 (1975) 985-992
  - Robert M. May, *Biological Populations Obeying Difference Equations: Stble Points, Stable Cycles, and Chaos*, J. Theor. Biol., v. 51 (1975) 511-524